

Zpřístupnění ICT ve výuce matematiky

Making ICT Accessible in Mathematics Education



Renata Majovská, Václav Friedrich

Abstract

Although mathematics has belonged to basic pillars of European education for many years, we can observe that mathematical education battles with many problems in recent years. Mathematical education recedes to the background, students consider mathematics as a hard subject and even unnecessary. If we want to change the approach of student to mathematics, we have to change our teaching methods. We see a great potential in the involvement of computers and ICT technologies and cognitive methods in education. In this paper we present our results and experiences with using of Computer Algebra Systems, Microworlds and programs of interactive geometry at the Faculty of Economics of VŠB-TU Ostrava. All the results mentioned here are available in the e-learning courses in CMS Moodle.

Keywords

Mathematical education, ICT, Constructivism, Cognitivism, Computer Algebra Systems, Microworlds, Logo, E-learning course, Applets.

1 Úvod

Matematika patřila po celé generace k nedílným a nezpochybnitelným součástem základního vzdělání každého jedince. Ještě generace narozená v 60. letech minulého století absolvovala matematiku jako jeden ze stěžejních předmětů, který nechyběl snad v žádném ročníku studia, byl bohatě hodinově dotován a patřil k povinným maturitním předmětům.

I dnes patří matematika mezi základní pilíře evropské vzdělanosti, jde však spíše o proklamaci nežli o reálné naplnění tohoto pojmu. Výuka matematiky ve školách ustupuje do pozadí, naopak ve veřejnosti sílí názory, že se v životě můžeme bez matematiky obejít. Dokonce i v ekonomii, která vždy spojovala exaktní matematický přístup s humanitním filosofickým, se začínají objevovat proudy, například tzv. rakouská škola, které roli matematiky v ekonomických vědách zlehčují nebo ji považují přímo za škodlivou.

Co se stalo s matematikou, která byla nazývána královnou všech věd, tedy i věd humanitních? Proč stále více lidí tvrdí, že jsou „humanisté“ a že matematika je v „jejich“ humanitních vědách zcela zbytečná? Dnes proto hledáme odpověď na otázku, proč se předmět, který akceptovalo jako součást základního všeobecného vzdělání a bez větších problémů zvládalo několik generací našich předků, stal v současné době pro nemalou část veřejnosti zbytečným, neoblíbeným a dokonce nezvladatelným.

Příčin této krize matematiky je samozřejmě více. Navíc nejde pouze o krizi lokální, českou nebo středoevropskou. Zatímco však západní svět a zejména asijské tygři zřejmě našli na tuto krizi lék a již se s ní vypořádávají, u nás sice konstatujeme, že ústup od matematiky v kurikulech všeobecného vzdělání má katastrofální následky zejména na technických univerzitách, kam studenti přicházejí nepřipraveni a navíc s odporem vůči exaktním metodám, ale jinak se nic neřeší. Bylo by naivní schovávat se pouze za vnější příčiny a stěžovat si na nepřízeň osudu. S řešením problému musí každý začít u sebe. Jedině učitelé matematiky mohou vrátit matematice její postavení.

Chceme-li změnit vztah veřejnosti k matematice, musíme v první řadě změnit způsob, jakým se matematika dnes učí. Svět kolem nás prochází doslova revolučními přeměnami, hovoří se o informační revoluci, nástupu znalostní společnosti, nelze přehlédnout rostoucí vliv informačních a komunikačních technologií (ICT) na běžný život každého z nás. Měla by se tomuto trendu přizpůsobit i královna věd matematika?

Dějiny ukazují, že panovníci, kteří ignorovali společenský vývoj, často skončili na popravištích nebo v zapomenutí. Proto tvrdíme, že pokud chceme matematiku uzdravit, musíme našim žákům nabídnout výuku matematiky, která reflektuje všechny tyto moderní trendy, musí jít tedy o matematiku pro 21. století – moderní, aplikovanou a užitečnou.

V USA a v Kanadě v 80. letech minulého století převzala iniciativu za modernizaci výuky matematiky Národní rada učitelů matematiky (NCTM). Jejich reformní kroky, přestože bývají někdy i kritizovány, ovlivnily didaktiku matematiky na celém světě [4]. Zřejmě není náhodou, že prvním bodem reformy podle NCTM je zavádění počítačů a ICT do výuky matematiky. Proto se v našem příspěvku zaměříme především na tuto oblast.

2 Výuka matematiky na vysoké škole

Výuka matematiky na školách všech stupňů se potýká již mnoho let se spoustou problémů. Předmět, který byl po mnoho desetiletí vnímán jako jeden z nezpochybnitelných základů vzdělanosti, se dostal postupně na okraj zájmu veřejnosti. Matematika sice na jedné straně proniká stále více do všech oblastí lidské činnosti, mnoho lidí ji však považuje za zbytečnou a domnívá se, že i bez matematického vzdělání se dá dosáhnout úspěšné kariéry. Na školách bývá matematika vnímána jako předmět neoblíbený, nezáživný, těžký, odtržený od reality a dokonce zbytečný.

Tyto problémy se pochopitelně promítají i do vysokoškolské výuky. Poněkud příznivější je situace na oborech, které s matematikou bezprostředně souvisí a kam se obvykle hlásí studenti, kteří mají tento předmět v oblíbenosti. Problémy se objevují již na technických oborech, kde se studenti více než dříve potýkají se zvládnutím matematiky, a to i přesto, že mnohé fakulty snížily oproti minulosti své požadavky. Nejméně příznivá je situace na oborech humanitně orientovaných, jako je ekonomie, sociologie, právo a podobně. Zde se nejčastěji setkáváme s názorem, že matematika (statistika, logika, ...) je zbytečná, a to nejen od studentů, ale někdy i od pedagogů.

Otázkou tedy je, jak připravit výuku matematiky zejména v oborech určených „pro nematematiku“, jak tento předmět studentům přiblížit, usnadnit jeho vnímání a především ukázat, že i v jejich životě může matematika hrát důležitou roli, jednak jako disciplína, který přináší různé v praxi použitelné nástroje, jednak jako obor, který tříbí systematické a logické myšlení a rozvíjí schopnost objektivního vnímání skutečnosti a faktů.

2.1 S jakými problémy se potýká vysokoškolská matematika

Pokusme se uvést nejčastější problémy, se kterými se dnes potýká vysokoškolská výuka matematiky, orientovaná na studenty, pro které není matematika hlavním předmětem jejich zájmu, tedy takzvaná „matematika pro nematematiku“.

a) malá hodinová dotace, neodpovídající cílům

Počty hodin matematiky na vysokých školách v posledních letech výrazně klesly. Zejména s přechodem na vícestupňové studium (bakalářské, magisterské, doktorské) docházelo ke snižování hodinových dotací matematiky nebo ke krácení předmětu ze dvou na jediný semestr. Takto omezený počet hodin však neumožňuje kvalitně zvládnout celý předpokládaný rozsah výuky, takže nutně dochází k omezování nebo vypouštění některých témat, ke snižování náročnosti výuky, výuka je více přehledová a povrchní. Na to, co by mělo být hlavním efektem matematiky pro „nematematiku“, totiž aplikace matematických metod v konkrétním oboru (například v ekonomii), již obvykle vůbec nezbývá čas.

V poslední době se také hovoří o potřebě optimalizovat rozsah prezenční výuky na vysokých školách, neboť naši studenti tráví v učebnách mnohem více času, než bývá zvykem například v zahraničí. Tato optimalizace by měla upřednostnit předměty, které jsou teoreticky náročné a vedou k získání nejen znalostí, ale i dovedností, takže přímo vyžadují bezprostřední kontakt s pedagogem v učebně. Z tohoto pohledu by matematika měla patřit mezi předměty, jejichž rozsah by minimálně měl zůstat zachován. Jsou však oprávněné obavy, že odborné „lobby“ v oborových radách si raději udrží své předměty, takže výsledný efekt optimalizace bude pro matematiku opačný než původní záměr.

b) vykazované výkony neodpovídající náročnosti práce

Pedagogický výkon na školách se často měří pomocí takzvaných studentokreditů. Tento údaj se následně využívá jako jedno z kritérií při rozdělování financí na katedry. Studentokredity však zvýhodňují předměty, které se vyučují především formou přednášek ve velkých posluchárnách. Také počet kreditů se u většiny předmětů odvíjí od hodinových dotací a příliš nezohledňuje skutečnou náročnost práce. To v důsledku znamená, že učitelé matematiky vykazují při stejné nebo vyšší náročnosti práce mnohem nižší výkon než učitelé výkladových předmětů. Pro srovnání si můžeme uvést jednoduchý příklad: ryze výkladový předmět vyučovaný pouze formou přednášek ve velké posluchárně (2 hodiny týdně) představuje produktivitu pedagogické práce 200 studentokreditů za hodinu. Oproti tomu výuka matematiky, která kombinuje přednášky (1 hodina týdně) a cvičení v menších skupinách (2 hodiny týdně) vykazuje produktivitu pouze 75 studentokreditů za hodinu.

c) velmi heterogenní skupiny studentů (znalosti, vztah k matematice)

Dříve byly vstupní znalosti vysokoškolských studentů z matematiky mnohem vyrovnanější než v současné době. Je to způsobeno jednak zrušením povinné maturity z matematiky, jednak větší diferenciací osnov jednotlivých typů středních škol a samozřejmě také mnohem větším procentem žáků, kteří dnes pokračují ze středních škol na terciárním stupni vzdělávání. V jedné studijní skupině se tak schází studenti s diametrálně rozdílnými znalostmi matematiky, ale i různými studijními návyky a v neposlední řadě i různým vztahem k matematice. Výuka v takových heterogenních skupinách je samozřejmě mnohem náročnější, než pokud by studenti byli ve svých znalostech přibližně srovnatelní.

Řešením by mohlo být například rozdělení studentů do výuky podle skutečných znalostí matematiky, například na základě vstupního rozřazovacího testu. Takový přístup je na mnoha školách běžný například při výuce cizích jazyků. Je však zajímavé, že zatímco u jazyků je takový způsob výuky přijatelný, v případě matematiky se ho prosadit nedaří. Jakýmsi náhradním řešením tak často bývají takzvané „vyrovnávací“ kurzy matematiky, které mohou studenti volitelně navštěvovat v době mimo řádnou výuku.

d) všeobecně nižší úroveň znalostí a dovedností, než je předpokládána

Z důvodů, které již byly uvedeny, jsou dnes vstupní znalosti vysokoškoláků z matematiky nižší, než tomu bývalo dříve. Dnes se již na středních školách prakticky nesetkáme s výukou tzv. vyšší matematiky (derivací, integrálů), komplexních čísel nebo analytické geometrie.

Učitelé matematiky na vysokých školách však na tento vývoj mnohdy nereagují a nechtějí do svých osnov zařadit látku, kterou považují za středoškolskou, navíc na ni v osnovách není dost času. Díky tomu dochází k „rozevírání nůžek“ mezi střední a vysokou školou, což ještě více zhoršuje schopnost studentů zvládnout vysokoškolskou výuku matematiky. Některé fakulty proto pořádají pro své budoucí studenty přípravné kurzy z matematiky, které by měly tyto rozdíly vyrovnat.

e) neochota logicky myslet, preference memorování nebo vyhledání „hotových“ informací

Matematika by měla rozvíjet logické myšlení a samozřejmě tuto formu myšlení také tříbit a trénovat. Přes různé školské reformy však je většina předmětů stále založena především na memorování faktů nebo vyhledávání již hotových informací v literatuře nebo na internetu. Studenti se mnohdy domnívají, že tímto způsobem zvládnou i matematiku. Učí se nazpaměť definice i celé příklady a doufají, že jim to bude ke zkoušce stačit. Nechtějí se smířit s tím, že způsob výuky, který

jim přináší úspěch v jiných předmětech (tedy memorování), v matematice k úspěchu nevede. To je pak příčinou, proč matematiku vnímají jako podivný předmět, který vyvolává nechuť a strach.

2.2 Přístupy k výuce matematiky na vysoké škole

Jak tedy přistupovat k výuce matematiky na vysokých školách, aby se uvedené handicapy co nejvíce eliminovaly? Podívejme se na různé způsoby a názory, jak matematiku učit.

a) extenzivní versus intenzivní styl výuky

Extenzivní přístup k výuce matematiky je založen na předpokladu, že čím víc toho studenti spočítají, tím lépe budou připraveni na písemku nebo zkoušku a tím lépe látku pochopí. Za měřítko pedagogického mistrovství se považuje počet příkladů spočítaných v rámci jednoho cvičení. Tento přístup nesporně má své přesnosti, mimochodem technika výuky matematiky profesora Toru Kumona z Japonska, která slaví velké úspěchy nejen v Asii, ale i v některých tzv. „západních“ zemích, využívá i dril. Je to však technika, která není určena pro výuku ve třídě, ale především pro individuální rozvoj v mimoškolní přípravě.

Intenzivní výuka klade důraz na zvládnutí a pochopení dané problematiky. Počítané příklady slouží jako pomůcka k pochopení daného pojmu, zvládnutí daného problému. U jednoho a téhož příkladu se počítají různé varianty, řeší se podúlohy typu „co se stane, když změním tuto podmínku nebo toto číslo“. Během vyučovací hodiny se tak zvládne mnohem méně příkladů, což u studentů vyvolává pocit, že jsou málo připraveni.

b) teoretický versus aplikovaný přístup

Teoretický přístup k výuce matematiky vychází z přesvědčení, že matematika je teoretická disciplína, kterou je třeba také tímto způsobem vyučovat. Řešené příklady jsou bez kontextu, studenti pracují s krkolomnými výrazy, které v praxi nikdy nepotkají, výsledky výpočtů jsou bezrozměrná neinterpretovatelná čísla. Právě tento přístup, i když některými matematiky obhajovaný jako ten „kvalitní“, vede u studentů k pocitu, že matematiku ve svém oboru nikdy nevyužijí. Výklad nových pojmů založený na definicích, větách a důkazech je pro „nematematiky“ naprosto nesrozumitelný. Tito studenti neocení logicky čistou axiomatickou výstavbu matematické teorie, ale snaží se pochopit, proč se matematiku učí a k čemu jim může pomoci.

Proto lze u této významné skupiny studentů z humanitních, ale i technických oborů, preferovat přístup aplikovaný, který chápe matematiku především jako disciplínu přinášející nástroje a metody použitelné v praxi. Výuka probíhá řešením praktických příkladů, které jsou obrazem konkrétního reálného problému. Dokonce i výuka nového pojmu začíná motivačním příkladem, na kterém se ukazuje, proč je zavedení takového pojmu užitečné. Přesná definice pojmu, pokud je vůbec zmíněna, výuku tohoto pojmu nezačíná, ale často naopak ukončuje.

c) klasický versus modernistický přístup

Klasický přístup k výuce matematiky vychází z předpokladu, že nejlepším nástrojem pro výuku matematiky je tužka a papír nebo tabule a křída. Matematici jsou často konzervativní a nedůvěřiví vůči zavádění nových metod a technologií do výuky svých předmětů. Vzpomeňme si, jaký odpor zejména mezi nimi vyvolaly kalkulačky a jak neradi se loučili s matematickými tabulkami nebo ručním počítáním odmocnin. Dnes stejně nedůvěřivě hledí na počítače nebo na e-learning. Takový přístup však tím více odcizuje matematiku studentům, kteří jsou naopak zvyklí využívat nové technologie všude tam, kde je to možné.

Modernistický přístup hledá v každé nové technologii to pozitivní, čím by mohla pomoci ve výuce. Nejde o to násilně používat nové postupy v matematice za každou cenu, ale poznat a pochopit, v čem může být jejich přínos a jak usnadní studentům vnímání a osvojení si matematických nástrojů. Nové technologie znamenají vždy konec něčeho starého, ale na druhé straně naopak otevírají nové možnosti. Budoucí studenti možná opravdu nebudou znát goniometrické substituce při výpočtech integrálů, ale díky numerickým metodám zvládnou výpočty i takových integrálů, které by pouze s tužkou, papírem a tabulkami spočítat nikdy nedokázali.

d) nové pedagogické přístupy – konstruktivismus a kognitivismus

V poslední době se v pedagogice objevují nové přístupy a koncepce, které nacházejí své uplatnění i při výuce matematiky. Tyto přístupy se obvykle snaží nahradit tradiční transmisivní styl výuky, tedy předávání znalostí od učitele žákovi, jinými, efektivnějšími metodami.

Konstruktivismus stojí v přímé opozici proti transmisivnímu přístupu k výuce. Není důležité, co učitel žákům sdělí (teach), ale co se žáci skutečně naučí (learn). Konstruktivismus je založen na zkušenostním poznání, kdy si žák sám konstruuje nové poznatky v konfrontaci se svými dosavadními zkušenostmi a tento postup je tedy ryze individuální. Nové poznání vzniká interakcí mezi stávajícími znalostmi a zkušenostmi a novými podněty. Proto konstruktivismus klade hlavní důraz na žáka jako na aktivní prvek procesu výuky. Nechat žáky, ať sami „najdou“ definici nového pojmu a jeho vlastnosti, je však obvykle časově mnohem náročnější než přednést a nadiktovat již hotovou definici. Proto je tento přístup k výuce vnímán často jako neefektivní, protože tuto efektivitu neměříme poznáním žáka (learn), ale množstvím odučené látky (teach).

Profesor Griffith [3] však tvrdí, že základním rysem matematiky nejsou již hotové matematické struktury, ale jejich hledání. Cesta k matematice je tedy cestou postupného konstruování matematického světa. Z tohoto pohledu je konstruktivismus přirozenou a základní formou matematického poznání.

Kognitivismus je jedno z paradigmat takzvaných kognitivních věd (vedle konekcionismu a enaktivního přístupu). Kognitivismus chápe poznávání jako zpracování informace [1]. Jako vhodný nástroj k tomuto zpracování je považována výpočetní technika, proto se kognitivismus obvykle spojuje s ICT technologiemi a použitím počítačů v procesu poznání. Kognitivními technologiemi ve výuce tedy rozumíme počítačové programy, které napodobují procesy konceptuálního myšlení, a proto mohou být využity i ve výuce matematiky jako podpora při řešení matematických nebo logických problémů.

Některé kognitivní technologie, které jsou vhodné pro výuku matematiky, si uvedeme v další části tohoto článku.

2.3 Jak zapojit počítač do výuky matematiky

Zapojení počítačů a všech ICT technologií do procesu výuky může mít různou kvalitu a formu. Počítač můžeme vnímat jako nástroj, pomocí kterého si pedagog připravuje své učební pomůcky, stejně jako prostředí, ve kterém celá třída pracuje na řešení určitého matematického problému.

a) nástroj pro učitele

Nejjednodušší forma, jak může výpočetní technika pomoci ve výuce matematiky, je využít počítač jako nástroj pedagoga pro přípravu výuky. Učitel, který zvládne práci s textovým editorem, včetně potřebného editoru vzorců, tabulkovým kalkulátorem, včetně tvorby grafů, a některého z grafických programů, je v podstatě dostatečně připraven k tomu, aby mohl své studijní opory sám převést do

graficky přijatelnější podoby. V době, kdy se vysokoškolský učitel sám stává editorem a mnohdy i vydavatelem svých učebnic a skript, ať již v tištěné nebo stále častěji v elektronické podobě, lze výše uvedené dovednosti považovat za minimální standard.

b) demonstrační nástroj

Počítač může sloužit ve výuce matematiky jako názorný demonstrační nástroj, pomocí kterého učitel prezentuje nové poznatky. K výuce s podporou počítače je třeba speciálně vybavená třída (počítač + interaktivní tabule nebo projektor), což ale na vysokých školách bývá často standardem. Nejjednodušší formou takové demonstrace může být pouhá prezentace s využitím některého prezentačního grafického programu, nabízí se však i využití různých interaktivních nástrojů, animací, demonstračních videosekvencí a podobně. Mnohé z takových nástrojů lze již dnes najít volně dostupné na internetu. Mnozí učitelé matematiky, zejména na základě dosavadních pedagogických zkušeností, by jistě sami dokázali navrhnout scénář podobné animované nebo interaktivní prezentace, k její realizaci jim však chybí kromě času také potřebné znalosti programování v prostředí Java, Flash a podobně. Některé školy proto poskytují takovým aktivním pedagogům potřebný support v podobě ICT laboratoří, které mohou učitelům na základě jejich požadavků pomoci obdobné pomůcky vytvořit. Tyto služby však na našich univerzitách nejsou zdaleka tak běžné, jak by bylo třeba.

c) praktická pomůcka na cvičení

Využití počítačů jako praktických pomůcek, které při vlastní výuce matematiky používají sami studenti, je z hlediska požadavků nejnáročnější forma výuky. Taková výuka totiž musí probíhat v plně vybavené počítačové učebně, kdy má každý student nebo nejvýše dvojice studentů k dispozici svůj vlastní počítač. Kapacity počítačových učeben na školách však často nestačí pokrýt požadavky pedagogů a přednost dostávají odborné předměty. Některé školy již procházejí transformací na tzv. notebookové nebo netbookové školy, což znamená, že v takových školách je prakticky ve všech třídách možnost připojení k internetu přes Wi-Fi bezdrátovou síť a na lavicích jsou k dispozici zásuvky na napájení. Žáci si do výuky nosí své počítače, jejichž cena je dnes srovnatelná s dražšími vědeckými kalkulačkami. Tento proces je však teprve na počátku a na mnohých školách se o něm ještě ani nezačalo diskutovat.

Využití počítačů ve výuce je také vázáno na programové vybavení. Kvalitní komerční programy jsou drahé a rozpočty škol na ně nemají. Situace se mnohdy řeší sponzorskými dary nebo rozvojovými projekty, tato možnost je však samozřejmě omezená. Nepochopitelně málo se přitom využívá možnosti používat bezplatné programy s licencí „free software“ nebo „open source software“, přestože mnohé z nich byly právě pro vzdělávací účely navrženy a vytvořeny. Naše školy by prakticky nemusely investovat do programového vybavení ani korunu, a to platí i o kognitivních programech pro oblast výuky matematiky. Přesto naše oficiální místa často upřednostňují placené komerční produkty a pro tyto programy poskytují také metodickou podporu.

3 Kognitivní technologie ve výuce matematiky

Do skupiny kognitivních technologií, které lze využít při výuce matematiky, se obvykle řadí tyto čtyři skupiny programů [7]:

- programy pro tabulkové výpočty a grafy,
- počítačové algebraické systémy,

- mikrosvěty a počítačové laboratoře,
- prostředí dynamické geometrie.

Neboť problematika tabulkových programů je poměrně známá a tyto programy se ve školách využívají ze všech uvedených skupin nejvíce, zaměříme se v této kapitole na ostatní tři oblasti využití kognitivních programů ve výuce matematiky a příbuzných tzv. „exaktních“ předmětů.

Odpůrci kognitivních technologií se obávají, aby se tyto technologie nestaly pouhou berličkou, která bude nahrazovat matematické dovednosti a matematické myšlení. Poukazují na to, že studenti se při práci s počítači často zaměřují na vlastní technologie a již méně na matematický problém, který řeší. Je třeba si uvědomit, že ICT technologie jsou pouze nástroj, který nám pomáhá řešit úlohy. Počítač nebude za nás myslet, vlastní kontrolu nad řešením úlohy má vždy řešitel, tedy člověk. Při používání těchto programů také není až tak důležité, jak počítač danou úlohu počítá, ale co počítá a jak správně interpretovat výsledky. Je pravda, že některé tradiční dovednosti při použití počítačových technologií zakrňují a postupně zanikají, ale jiné, dosud příliš nepoužívané, se rozvíjejí nebo vznikají. Matematika jako každá disciplína se vyvíjí a takový posun ve významu různých postupů a metod je přirozený. Díky kognitivním technologiím již dnes můžeme řešit úlohy, které ještě před několika lety byly tradičními postupy neřešitelné nebo řešitelné jen obtížně.

a) počítačové algebraické systémy

Název počítačové algebraické systémy (CAS programy – z anglického Computer Algebra Systems) zahrnuje programy, které kromě počítání s čísly umí pracovat i s algebraickými výrazy a funkcemi, upravovat je, řešit rovnice, derivovat, integrovat a dokonce i kreslit grafy. Schopnosti CAS programů můžeme rozdělit do tří skupin:

- numerické výpočty,
- symbolické výpočty,
- kreslení grafů.

Numerické výpočty jsou založeny na rychlých a efektivních algoritmech pro výpočty s čísly (reálnými nebo komplexními) a číselnými strukturami (vektory, maticemi). Tyto programy počítají s vysokou přesností (mnohem vyšší než nejpřesnější kalkulátory), přitom rychlost výpočtu je díky použitým algoritmům rovněž velmi vysoká.

Symbolické výpočty jsou založeny na poněkud jiné koncepci. Jejich hlavní předností je možnost úprav algebraických výrazů ještě předtím, než do nich pro výpočet dosadíme konkrétní čísla. Tím se zvyšuje přesnost dosažených výpočtů, neboť při algebraických úpravách nedochází k zaokrouhlovacím chybám.

Grafické možnosti CAS programů zahrnují široký repertoár grafů funkcí jedné a dvou proměnných (v rovině a prostoru) včetně funkcí zadaných parametricky, implicitně nebo v polárních (cylindrických) souřadnicích. Do nabídky grafických možností patří i různé druhy statistických grafů od sloupcových a výsečových až po některé speciální typy (např. box – plot).

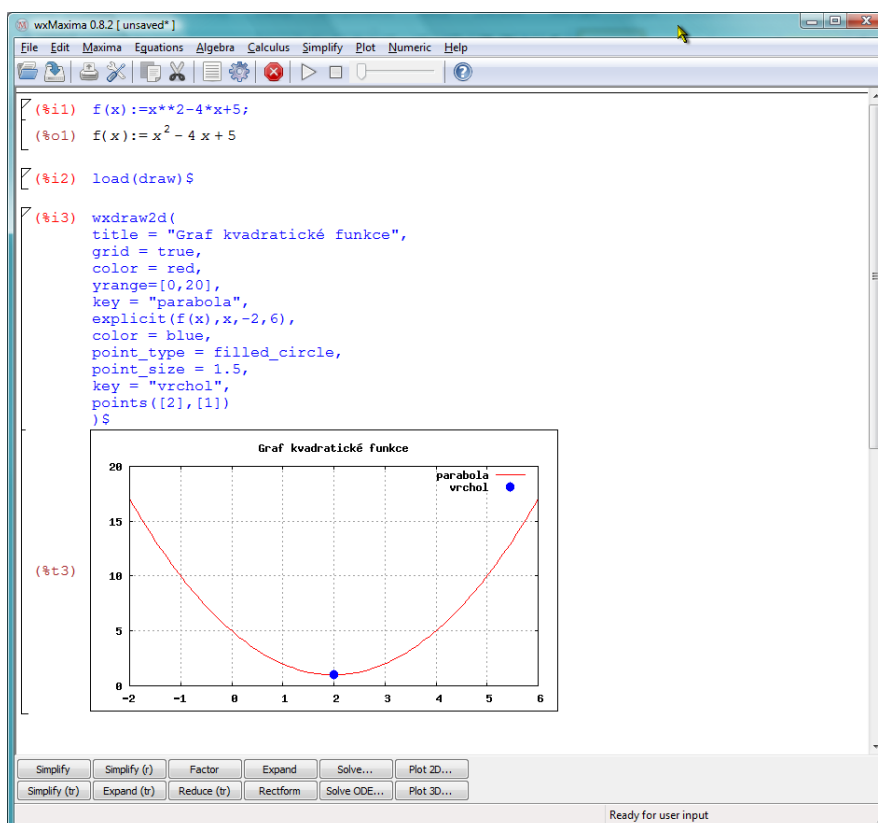
Typickými komerčními představiteli této skupiny programů jsou programy MATLAB, Mathematica a Maple. Program MATLAB je oblíben především mezi techniky, programy Mathematica a Maple pro změnu oslovují spíše absolventi teoretických a přírodovědných oborů. Všechny tři uvedené programy jsou velmi nákladné na pořízení a udržení licence, a i když jejich výrobci nabízejí různé školní multilicence a slevy pro akademický sektor, pro většinu škol jsou přesto prakticky

nedostupné. V rámci vzdělávacího programu pro učitele Státní informační politika ve vzdělávání byl v rámci modulu „ICT ve výuce matematiky“ propagován další komerční program Derive, přestože autoři tohoto modulu museli vědět, že mnohé školy nebudou mít na jeho nákup finanční prostředky.

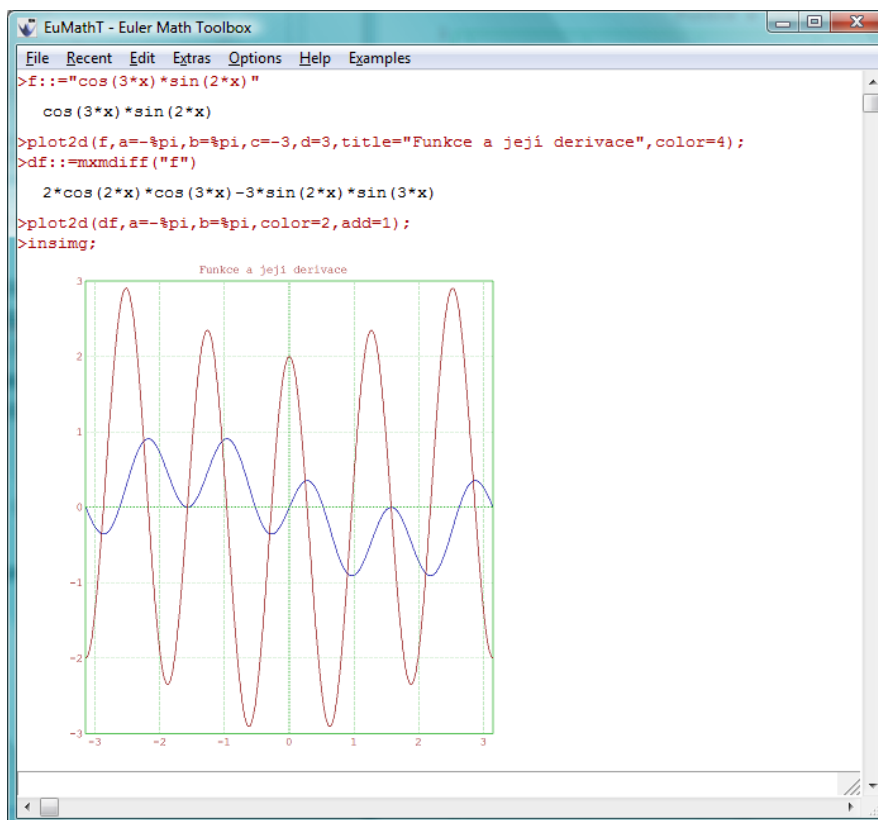
V poslední době v nabídce CAS programů najdeme některé free a open source programy, které jejich autoři nabízí zcela zdarma. Mnohé z nich mají obdobný vzhled a dokonce používají stejný nebo obdobný ovládací jazyk jako zmíněné komerční produkty, i když většinou nenabízejí takový uživatelský komfort. Pro svou dostupnost se tyto programy stále více prosazují na školách všech stupňů. Představíme si stručně dva z nich, které se v současné době používají na pracovišti autorů.

Maxima je CAS program pro řešení matematických úloh, který vznikl (ještě pod názvem MACSYMA) koncem 60. let minulého století na univerzitě MIT v Massachusetts (USA). Tento program se stal mimo jiné předlohou pro komerční CAS produkty Maple a Mathematica. Od roku 1998 je Maxima jako open source k dispozici zcela bezplatně. O její další vývoj se stará, tak jako v případě většiny úspěšných open source programů, komunita uživatelů, a to především z akademických kruhů. Maxima je program orientovaný především na symbolické výpočty a manipulace s výrazy a funkcemi, a proto je velmi vhodný pro výuku matematiky.

Jedním z dalších volně dostupných CAS programů je německý projekt Euler Math Toolbox, vyvíjený na univerzitě v Eichstaattu (Bavorsko). Program je zaměřen především pro numerické výpočty a kreslení grafů a nezapře podobu s komerčním programem MATLAB. Představuje tak výkonné interaktivní prostředí pro vědecké výpočty, může však sloužit také jako pomůcka při výuce matematiky a nadstavbových předmětů (např. Numerické metody).



Obr. 1 Program Maxima a jeho využití při zkoumání průběhu funkcí



Obr. 2 Funkce a její derivace v programu Euler

b) mikrosvětvy a počítačové laboratoře

V roce 1967 vznikl v laboratořích MIT projekt Logo, u jehož zrodu stál Seymour Papert, jeden ze spoluvůdců pedagogického konstruktivismu. Principem projektu bylo ovládní mechanické želvy, která se pohybovala po papíru na podlaze a kreslila na něj čáry, pomocí příkazů z počítače. V roce 1980 vydal Papert knihu *Mindstorms* [5], ve které představuje Logo jako nástroj pro rozvíjení logického myšlení zejména u dětí, ale i u dospělých. Rozvoj osobních počítačů, který právě v té době začínal, později umožnil přenést želvu ze země na obrazovku počítače,

Genialita nápadu se želvou spočívá v tom, že myšlenkové postupy, které vytváříme, abychom například naučili želvu obejít překážku nebo nakreslit hvězdu, se zobrazují na počítači a každá chyba v naší úvaze se projeví jako chybně nakreslený obrazec nebo pohyb želvy. Není divu, že projekty a programy založené na podobném principu vznikaly i později a vlastně vznikají dodnes: stačí si připomenout u nás populární program Karel nebo projekt Baltík. Při vytváření prvních osnov předmětu Informatika a výpočetní technika pro české školy na konci 80. let minulého století bylo Logo jedním z doporučených prostředí pro výuku algoritmického myšlení. V té době také vyšla zřejmě jediná česká publikace věnovaná tomuto jazyku [2].

Postupem času se i program Logo vyvíjel. Prvotní jednoduchý repertoár příkazů se rozšiřoval, místo jedné želvy bylo možné ovládat i několik želv současně, vznikaly i prostorové 3D verze, které umožňovaly pohyb želvy (ale i jiných objektů, například autíček) nejen v rovině, ale i v prostoru. Brzy se ukázalo, že Logo nemusí být pouze dětskou hračkou na rozvíjení logického myšlení, ale i nástrojem pro modelování komplexních dějů – například pro generování fraktálů, modelování biologických systémů, dopravní sítě a podobně. Současný trend v oblasti vědeckého modelování,

takzvané multiagentní modely, našel v Logu vhodný nástroj pro dynamickou simulaci těchto modelů.

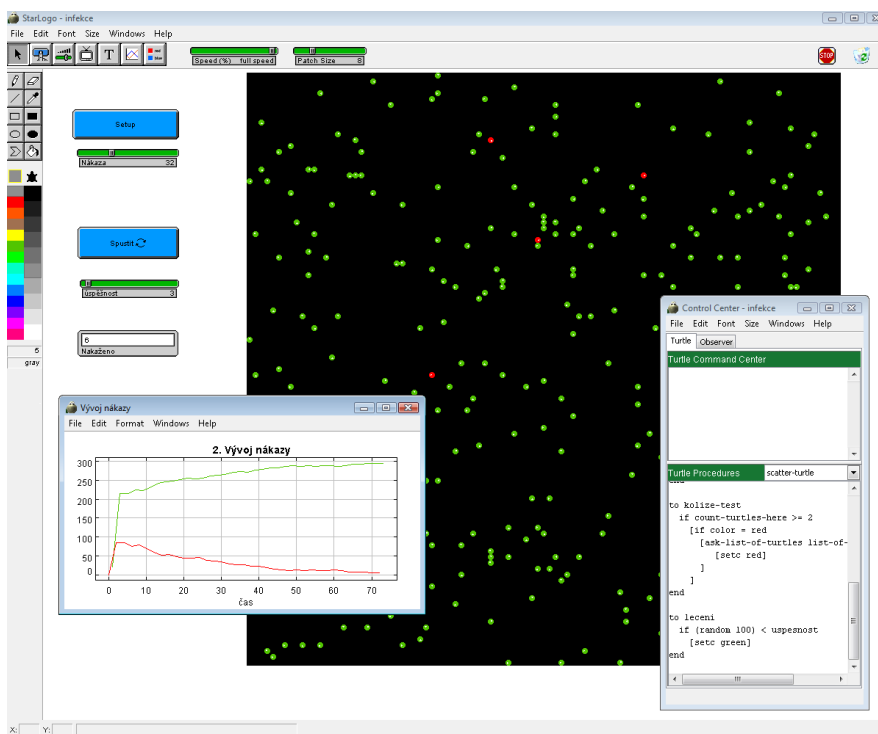
Z různých implementací systému Logo pro dnešní osobní počítače můžeme uvést tři úspěšné programy, které se vyvíjejí každý svým způsobem, nezávisle na sobě, takže se hodí i pro různé oblasti využití. Všechny tři programy jsou dostupné zcela zdarma (české ministerstvo školství propaguje slovenský projekt Imagine Logo, který je ovšem komerční, i když cenově přijatelný).

FMS Logo – program vyvíjený na základě projektu univerzity v Berkeley (USA), se nejvíce podobá původní koncepci Loga, jeho grafika je velmi strohá, ovšem umožňuje připojit prostřednictvím USB portu skutečného mechanického robota, má také mnoho speciálních příkazů pro rozpoznávání textů, takže je v něm možné programovat celé interaktivní expertní systémy po vzoru programu Elisa (známý program, který si „povídal“ se svým uživatelem).

StarLogo – projekt vyvíjený na MIT, ze všech implementací zřejmě nejvíce využívá možnosti multiagentní simulace, v současné době se jeho vývoj orientuje směrem k 3D prostředí a grafickému návrhu algoritmů [2].

NetLogo – projekt NetLogo se odštěpil od původního StarLoga a vyvíjí se na Northwestern University (USA), umožňuje nejen interakci jednotlivých agentů v rámci jedné instalace programu, ale i komunikaci mezi jednotlivými programy po síti.

Na pracovišti autorů byl v roce 2008 řešen projekt FRVŠ, jehož cílem bylo obnovit před několika roky zrušenou výuku logiky na ekonomické fakultě. Namísto pro studenty nezáživné výuky teoretické matematické logiky byl od počátku tento nový předmět řešen se snahou nabídnout studentům prakticky použitelné nástroje pro logické postupy v ekonomických problémech a také trochu poučné zábavy (řešení různých logických úloh), která procvičí jejich myšlení a představivost.



Obr. 3 Model šíření epidemie v prostředí StarLogo

V rámci tohoto predmetu se studenti seznámí také s programem Logo (v současné době využívají StarLogo) a s jeho pomocí řeší několik úloh od kreslení jednoduchých obrázků jednou želvičkou (tedy prakticky původní záměr projektu Logo) až po multiagentní simulaci modelu šíření prvotního vzruchu, který může být interpretován jako vývoj epidemie nebo také jako model propagace, kterou znají z marketingu. Tzv. model SIR, který se matematicky popisuje soustavou tří lineárních diferenciálních rovnic [6], lze v Logu naprogramovat velmi jednoduše s využitím generátoru náhodných čísel à la Monte Carlo bez znalosti vyšší matematiky – přesto však výsledek simulace koresponduje s teoretickým řešením rovnic.

c) interaktivní geometrie

Programy interaktivní geometrie jsou nástroje, pomocí kterých může uživatel elektronickým pravitkem, kružítkem a barevnými tužkami demonstrovat a simulovat konstrukce na pracovní ploše, nejčastěji to je obrazovka PC, ale může být použita i interaktivní tabule. Základ pracovní plochy tvoří výkres, tj. vymezená část obrazovky, na který postupně umísťujeme objekty. Útvary, které konstruujeme a následně s nimi pracujeme, mohou být dvojího typu – nezávislé a závislé. Nezávislý útvar je sestaven pouze použitím základních bodů. Můžeme jej celý posouvat „táhnutím“ myši nebo posouváme body, pomocí kterých je vytvořen. Závislý útvar je sestaven tak, že je přichycený k jinému prvotnímu útvaru, závislému i nezávislému, a proto jej samostatně nemůžeme posouvat. Posune se pouze tehdy, když se posouvá jeho prvotní útvar. Možnost vytvářet nezávislé a závislé útvary umožňuje uživateli experimentovat a objevovat nové vztahy mezi zkoumanými objekty.

Přestože se na pracovišti autorů geometrie ve své čisté podobě nevyučuje, používáme program interaktivní geometrie Compass and Ruler (C.a.R) poněkud netradičně v matematické analýze k animovanému zobrazení matematických funkcí a jejich průběhu, kuželoseček, zavedení pojmu určitý integrál, jednotková kružnice, odvození některých vztahů mezi goniometrickými funkcemi a řešení goniometrických rovnic.


Pro zpřístupnění těchto animací v podobě appletů studentům jsme zvolili webovou prezentaci, která je umístěna na <http://www.pdf.umb.sk/~rmajovska/>. Webová stránka je volně přístupná veřejnosti. V současné době máme na této www stránce připraveno šest hlavních témat, obr. 4. Postupně bude nabídka rozšířena o témata „Diferenciální počet“ a „Integrální počet“.

Renata Majovská: Matematická analýza

Naše www stránka představuje elektronický kurs z matematické analýzy doplněný appletmi. Při vytvoření appletů jsme použili program [C.a.R.](#)

Obsah

- [Zakladatelé matematické analýzy](#)
- [Elementární funkce](#)
- [Průběh funkce](#)
- [Goniometrické funkce](#)
- [Goniometrické rovnice a vzorce](#)
- [Kuželosečky](#)

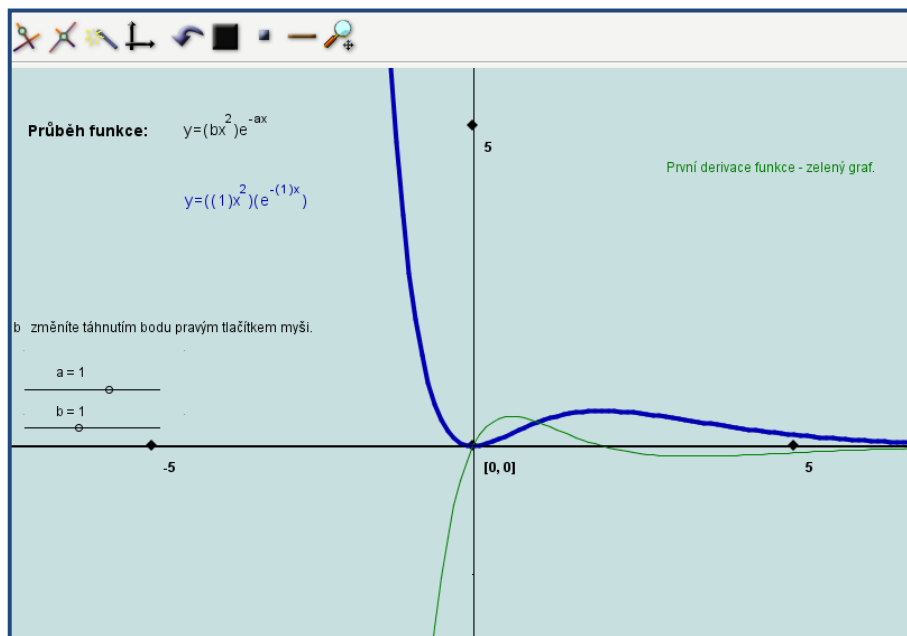


Autorem studijního materiálu je Renata Majovská, VŠB Ostrava: renata.majovska@vsb.cz

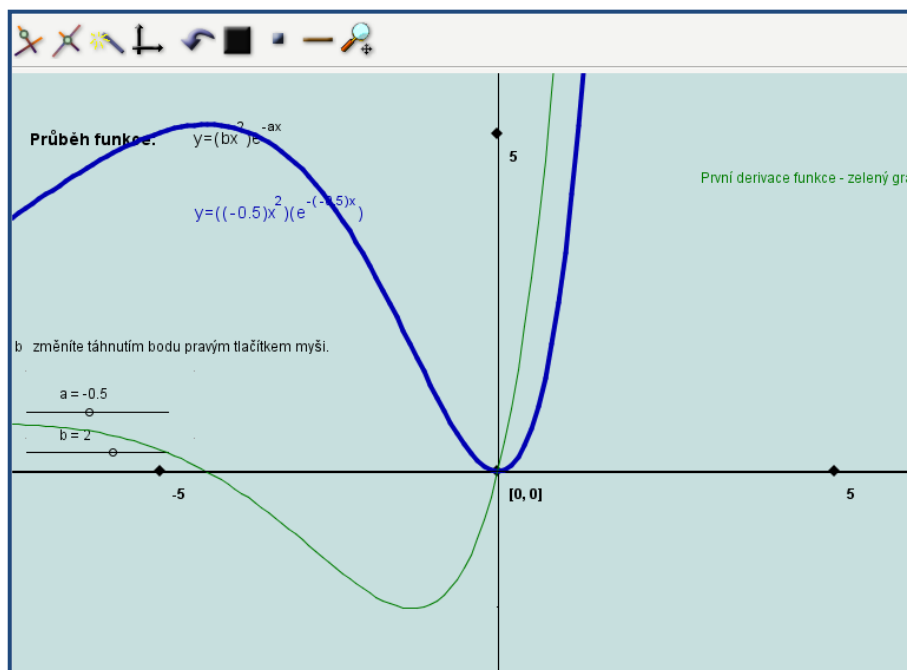
© Uživatel může tento studijní materiál použít pro svoje potřeby bez omezení. Distribuce a převod do tištěné podoby pouze se svolením autora.

Obr. 4 Úvodní stránka k appletům

Používáme applety dvojího druhu. První typ appletů obsahuje populární výklad daného pojmu, výčet důležitých vlastností a aritmetické posuvníky pro změnu parametrů funkce. Druhý typ appletů umožňuje vše, co první typ, navíc však obsahuje zredukovaný panel nástroje programu C.a.R., ve kterém jsou vybrané jen nejnужnější ikonky, pomocí kterých uživatel může vytvářet v hotovém appletu další euklidovské konstrukce. Na obr. 5 a 6 jsou ukázky appletů druhého typu, ve kterých můžeme pozorovat význam 1. derivace pro průběh funkce. Parametry v zadání funkce měníme pomocí posuvníků.

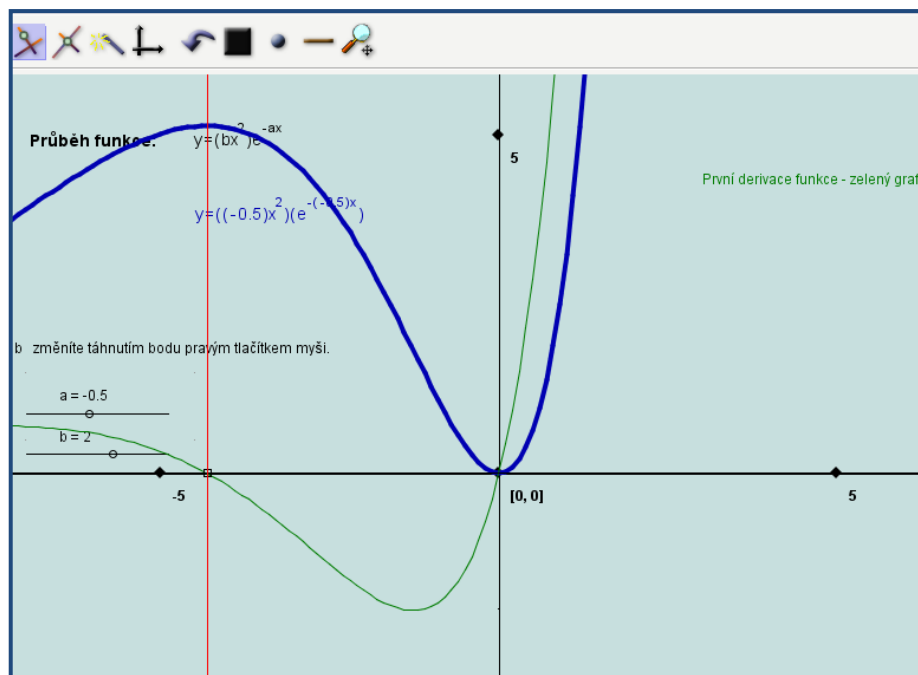


Obr. 5 Graf funkce $y = x^2 e^{-x}$



Obr. 6 Graf funkce $y = 2x^2 e^{0.5x}$

Animace znázorňující průběh funkce jsou vytvořeny jako applety s redukováným počtem ikoněk. Takové applety umožňují plnit další úlohy. Například najít průsečíky grafu první derivace funkce s osou x , v těchto bodech sestavit kolmici k ose x , popsat průsečík kolmice a grafu funkce, a podobně. Ukázka takového appletu je na obr. 7.



Obr. 7 Applet s vypracovanou úlohou

České ministerstvo školství v rámci svých aktivit preferovalo obdobný produkt Cabri Geometrie, který je však komerční.

4 Závěr

Nové formy a metody výuky matematiky, které byly částečně prezentovány i v tomto článku, dávají naději, že se matematice jednou vrátí její postavení, které si mezi ostatními obory poznání zaslouží, a že ji žáci a studenti přestanou vnímat jako disciplínu odtažitou, podivnou a neúčinnou. Dobré příklady praxe ze zahraničí, kterými se prezentují i někteří partneři našeho pracoviště – např. Univerzita Zaragoza (ESP), Slovenská technická univerzita Bratislava (SK), apod. – ukazují, že tato cesta je řešením a přináší úspěchy.

Aby podobné reformní kroky nebyly jen výsledky práce malých skupin nadšenců, jak tomu mnohdy v současné době bývá, měla by se od základu změnit i příprava budoucích učitelů matematiky na školách všech stupňů. Protože i když se článek věnoval především vysokoškolské matematice, negativní vztah k této disciplíně a strach z ní pěstují v žácích již školy nižších stupňů. Bohužel jsou to mnohdy právě mladí učitelé matematiky, absolventi pedagogických fakult a studijních oborů, kteří jsou nositeli konzervativních myšlenek a odpůrci inovací, protože právě tak je pro jejich budoucí profesi připravily jejich vysoké školy. Pokud se tedy říká, že problém s výukou matematiky je začarovaný kruh, příprava budoucích pedagogů matematiky je ono místo, kde je třeba tento kruh rozetnout.

Poznámka: Na pracovišti autorů byly v nedávné minulosti řešeny dva rozvojové projekty, které se bezprostředně týkaly zavádění nových technologií do výuky matematiky. Byly to projekty:

ESF CZ.04.1.03/3.2.15.1/0007 – Informační a komunikační technologie jako nástroj pro rozvoj systému, struktury a kvality vzdělávání (2006 – 2008).

FRVŠ 166/2008 – Tvorba nového předmětu "Logické postupy v práci moderního manažera" .

V současné době byla podána a na MŠMT ČR zaregistrována projektová přihláška:

ESF CZ.1.07/2.2.00/15.0111 – Kvantitativní a ekonomická gramotnost jako cesta ke konkurenceschopnosti ve znalostní společnosti.

Webové stránky, na kterých jsou dostupné e-learningové kurzy autorů:

Matematika A na počítači – <http://moodle.vsb.cz/archiv09/course/view.php?id=264>

Matematika B na počítači – <http://moodle.vsb.cz/archiv09/course/view.php?id=468>

Logické postupy v práci moderního manažera – <http://moodle.vsb.cz/kpm/course/view.php?id=94>

Applety z matematické analýzy – <http://www.pdf.umb.sk/~rmajovska/>

E– matematika pro ekonomy – <http://moodle.vsb.cz/archiv09/course/view.php?id=556>

Literatura

- [1] Burian, J.: Kognice kontra informace. Fakulta informatiky a statistiky, VŠE Praha. Dostupný z WWW: <http://eldar.cz/honza/articles/burian_kognice_informace.doc>.
- [2] Friedrich, V., Sedláček, V. LOGO pro děti i dospělé. Samostatná příloha časopisu Zpravodaj AK č. IX. Atari Klub Praha, 1989.
- [3] Hejný, M., Kuřina, F.: Co to znamená učit se matematiku? Dostupný z WWW: <www.fch.vutbr.cz/~polcerova/mat1/hejnywww.pdf>.
- [4] Hendl, J.: Reforma výuky matematiky podle NCTM Standardů 2000, Učitel matematiky, 11, 2002, říjen, s. 23-33.
- [5] Papert, S. Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas. Basic Books, Inc., 1980. ISBN 0-465-04627-4
- [6] Smith, D., Moore, L. The SIR Model for Spread of Disease. Journal of Online Mathematics and its Applications, 2006. Dostupný z WWW: <<http://www.joma.org/mathDL>>.
- [7] Vaniček, J. Počítačem podporovaná výuka matematiky. eAMOS – výukový systém. Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity, České Budějovice, 2002 - 2009. Dostupný z WWW: <http://eamos.pf.jcu.cz/amos/kat_mat/modules/external/index.php?kod_kurzu=kat_mat_9782>

Kontaktná adresa

PaedDr. Renata Majovská, PhD.
VŠB-TU Ostrava, Sokolská 33, 701 21 Ostrava 1
renata.majovska@vsb.cz

Ing. Václav Friedrich, Ph.D., Ing-Paed IGIP
VŠB-TU Ostrava, Sokolská 33, 701 21 Ostrava 1
vaclav.friedrich@vsb.cz