Vyučovanie analytickej geometrie s podporou informačných a komunikačných technológií

Teaching Analytic Geometry using Information and Communication Technologies

Karol Gajdoš

Abstract

The paper proposes an innovative approach to the teaching of mathematics at secondary school using information and communication technologies. We present our experience with teaching analytical geometry at a grammar school with support of CABRI geometry.

Keywords

Information technologies of communication, computer aided instruction, Cabri geometry, mathematics, analytic geometry

1 Úvod

Cieľom článku je poukázať na možnosti niektorých informačných a komunikačných technológií (ďalej IKT) vo vyučovaní matematiky, špeciálne tematického celku „analytická geometria“.

Z hľadiska využitia IKT vo vyučovacom procese má matematika špecifické postavenie. Pekne to vystihol istý náš popredný informatik, ktorý vyslovil názor, že vyučovať matematiku bez počítača je to isté ako učiť deti hrať na husliach bez huslí, čiže podľa neho je počítač nástroj matematiky. Aby žiak vedel pracovať s týmto nástrojom je úlohou učiteľa informatiky, avšak riešiť problémy pomocou neho by mala byť predovšetkým úloha učiteľa matematiky, resp. matematiky ako vyučovacieho predmetu. Tomu sa v budúcnosti bude musieť pravdepodobne prispôsobiť aj obsah matematiky ako vyučovacieho predmetu.

Z doterajšieho teda vyplýva, že IKT v iných predmetoch ako v matematike budú plniť skôr funkciu modernej učebnej pomôcky, avšak v matematike by mali predovšetkým plniť *úlohu nástroja na učenie sa riešiť problémy*. Avšak, a to treba osobitne zdôrazniť, aj súčasný obsah vyučovacej látky je možné ďaleko efektívnejšie naučiť žiakov ako pomocou klasických prostriedkov, t.j. predovšetkým tabule a kriedy. Tento spôsob vyučovania pretrváva na našich školách prakticky niekoľko storočí a je na čase ho zmeniť.

K tomuto je potrebné vytvoriť aj patričné softvérové vybavenie. V poslednom období vzniklo pomerne dosť didaktického softvéru aj pre matematiku. Ide jednak o jednoduché, viac-menej amatérske produkty, ale aj o profesionálne výučbové programy, či celé výučbové systémy. Napokon zručnejší učiteľ - informatik si môže jednoduchší softvér sám vytvoriť. O niečo podobné sa pokúšal aj autor tejto práce už pre vyše desaťročím. Išlo najmä o „kresliče“ grafov funkcií a o zavedenie goniometrických funkcií s podporou PC. Bohužiaľ v tej dobe ešte nebolo možné tieto programy naplno využiť, nakoľko školy boli slabo vybavené počítačmi, resp. počítačovými učebňami.

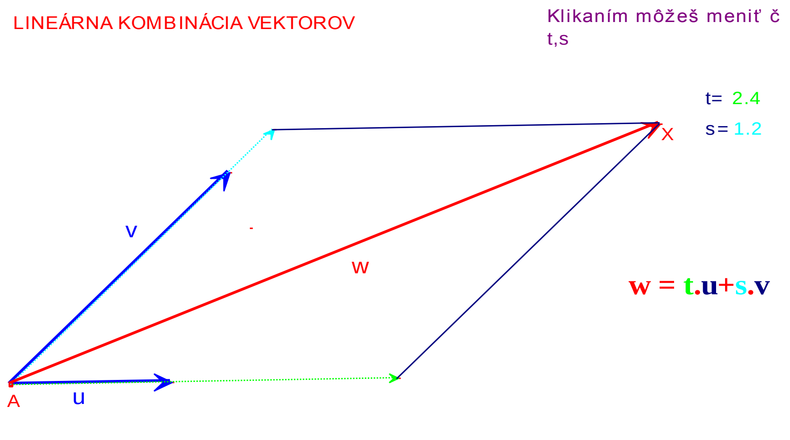
Z profesionálnych programov treba spomenúť predovšetkým DERIVE, CABRI GEOMETRIA a rôzne kresliče grafov funkcií, napr. Advance grapher, Equation grapher a iné. Samozrejme veľmi vhodný výučbový nástroj je aj tabuľkový procesor MS EXCEL, ktorého základy by mal ovládať každý učiteľ matematiky. Veľmi pozitívne je, že v rámci projektu Infovek, môžu školy uvedený softvér používať zdarma. Vzhľadom na obmedzený rozsah tohto článku, v ďalšom chceme poukázať na niektoré možnosti využitia didaktického softwaru „Cabri geometria“ v učive strednej školy, predovšetkým však v učive gymnázia. Domnievame sa, že z *didaktického hľadiska* má tento program v súčasnosti *najvyššiu hodnotu* spomedzi všetkých produktov, nakoľko ho možno využiť takmer vo všetkých tematických celkoch.

Veľkou prednosťou Cabri geometrie je, že priam podporuje uplatnenie dialogickej stratégie učiteľ - žiak, t. j. predovšetkým *heuristickú* metódu pri výklade učiva. Tá sa uplatňuje hlavne, ak žiaci sami tvoria za pomoci učiteľa výkres a po prípadnej manipulácii s nakreslenými objektmi objavujú nový poznatok. Tu vzniká problém, do akej miery by žiaci mali ovládať prácu s programom. Ak by sme program používali iba na výklad učiva, potom prakticky nemusia vedieť nič. Ideálne však určite je, ak majú aspoň základné zručnosti, ktoré si postupne zdokonaľujú. Samozrejme, ovládanie programu by sa mali učiť skôr na hodinách informatiky, kde je určite na to viacej času. Toto je otázka dohody členov predmetovej komisie. Na základe našich niekoľkoročných skúseností môžeme povedať, že Cabri 2D možno využiť takmer v každej téme stredoškolskej matematiky. V článku sú popísané možnosti použitia Cabri 2D, Cabri 3D a programu Microsoft PowerPoint vo výučbe *analytickej geometrie.*

2 Cabri a analytická geometria

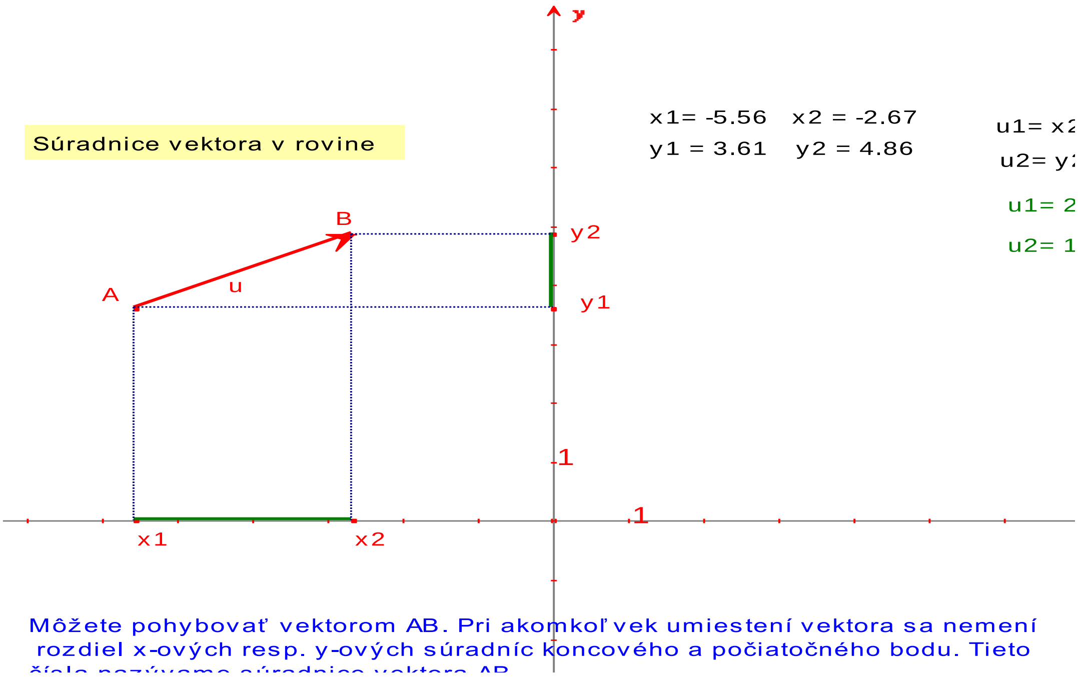
Cabri geometria môže byť užitočným didaktickým nástrojom aj pre výučbu analytickej geometrie, a to v rovine i v priestore. Ukážky výkresov, ktoré patria do tejto časti sú uložené v priečinkoch „vektory", „súradnice bodu", „priamka", "rovina" a „kužeľosečky". V tejto téme by sa skôr mala uplatniť samostatná práca žiakov, pomocou nástrojov Cabri, ktoré sú tak bohaté, že je namieste aj otázka čo teraz učiť z tohto tematického celku. Cabri totiž nielenže kreslí lineárne a kvadratické útvary, ale „vie" určiť ich rovnice a súradnice spoločných bodov. Takisto „vie" počítať uhly a samozrejme určiť aj vzdialenosti. Pomocou Cabri tiež dokážeme zistiť rovnobežnosť, kolmosť útvarov, zhodnosť, či bod patrí útvaru a prípadne či sú útvary zhodné. Preto sa domnievame, že po zvládnutí základných pojmov, predovšetkým základov vektorovej algebry, bude možné skôr sa orientovať na riešenie problémov s *využitím analytickej geometrie.* Bolo by určite vhodné uviesť podobné úlohy, avšak kvôli obmedzenému rozsahu tohto článku, uvádzame len niekoľko výkresov na podporu výučby základných pojmov vektorovej algebry, resp. analytickej geometrie roviny a čiastočne analytickej geometrie v priestore.

Na začiatku výučby samozrejme zavádzame pojem súradnice bodu na priamke, v rovine a v priestore. Po zvládnutí pojmu vektor (výklad sa môže robiť s pomocou prezentácie a tiež Cabri), definujeme súčet a rozdiel vektorov a násobok vektora reálnym číslom. Vo verzii Cabri II plus je už implementované makro „súčet vektorov", napriek tomu je samozrejme treba operáciu *definovať* (pozri prezentáciu a výkres „sucet vektorov"). Vlastnosti operácií s vektormi možno pomocou Cabri pekne demonštrovať, prípadne precvičovať pomocou výkresov „tri vektory" (ukazuje asociatívnosť sčitovania vektorov), „násobok vektora" a „násobok vektora1". Ďalej možno prejsť na pojem „lineárna kombinácia vektorov (zatiaľ iba dvoch) a to pomocou výkresu LK vektory (obr.1).



Obr.1 Lineárna kombinácia vektorov

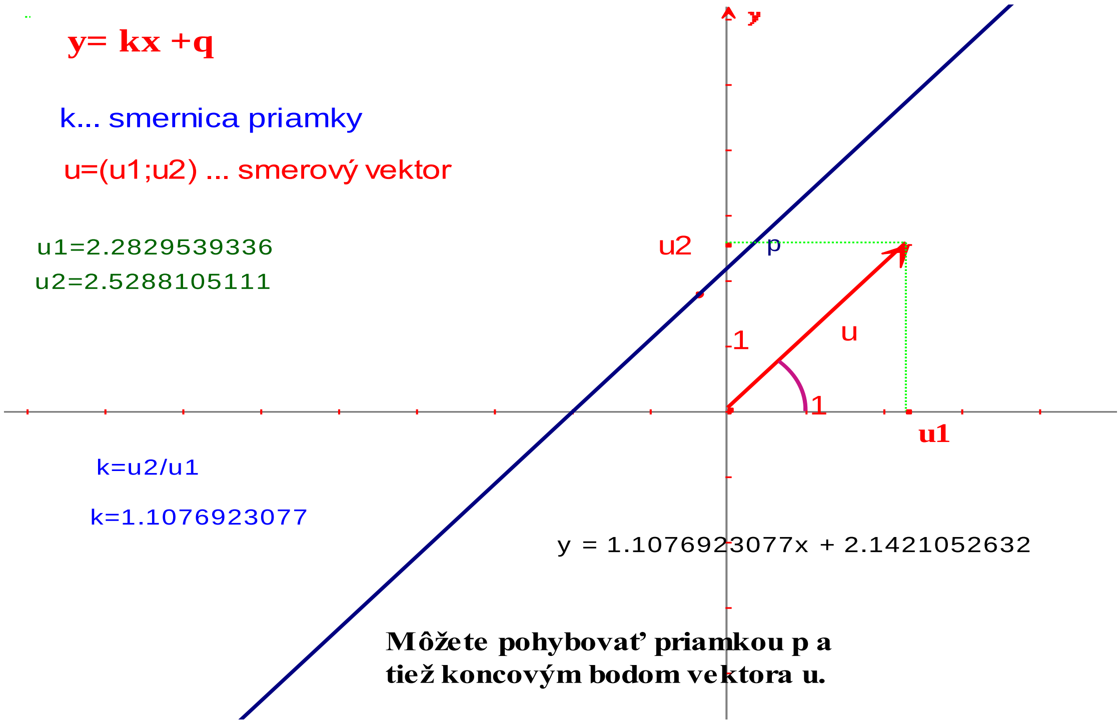
Tento výkres, možno tiež použiť pri výklade parametrického vyjadrenia roviny, vhodnejší je však výkres urobený v Cabri 3D, pod názvom LZ1. Pomocou výkresu „survektor“ možno pekne vysvetliť pojem „***súradnice vektora***“, s ktorým mávajú žiaci tiež ťažkosti. Vo výkrese môžu pozorovať, že ktorékoľvek umiestnenie vektora, má tie isté súradnice v zmysle definície (obr. 2). Samozrejme, treba vektor umiestniť aj do začiatku, aby žiaci objavili, že v tomto prípade súradnice vektora sú *súradnice koncového bodu jeho umiestnenia*. Výkres „LKv „ vyjadruje ľubovoľný vektor s celočíselnými súradnicami ako lineárnu kombináciu bázových vektorov (1;0) a (0;1).



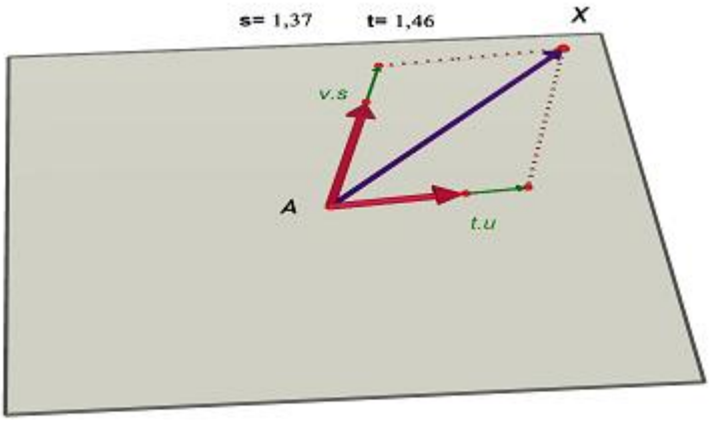
Obr.2 Súradnice vektora v rovine

Výkres „Par priamka“ by mal žiakom pomôcť dôkladne pochopiť parametrické vyjadrenie priamky. Výkres „smer vektor priamky“ demonštruje **smernicový tvar rovnice priamky** (obr. 3). Najskôr však treba definovať smerový uhol priamky.

Analytickú geometriu v priestore možno tiež z časti vyučovať s podporou priestorovej verzie Cabri, a to Cabri 3D. Vo vektorovej algebre sme už definovali lineárnu kombináciu vektorov. Pomocou Cabri 3D môžeme pekne demonštrovať situáciu, keď z troch vektorov aspoň jeden je lineárnou kombináciou zvyšných dvoch. Žiaci môžu pozorovať, že v tom prípade všetky tri vektory možno umiestniť do jednej roviny (už spomenutý výkres LZ1) a takisto definovať ***lineárnu závislosť vektorov.*** Prípad, keď sú vektory ***lineárne nezávislé*** demonštruje výkres LZ2, vektory nemožno umiestniť do jednej roviny. Výkres LZ1 samozrejme možno použiť pri výklade parametrického vyjadrenia roviny. Podobný účel má aj výkres „par roviny“. Ak máme k dispozícii Cabri 3D, môžeme použiť aj už uvedený výkres LZ1 a následne výkres „Param rovnice rovina“ (obr. 4).



Obr. 3 Smerový vektor priamky



Obr.4 Parametrické rovnice roviny

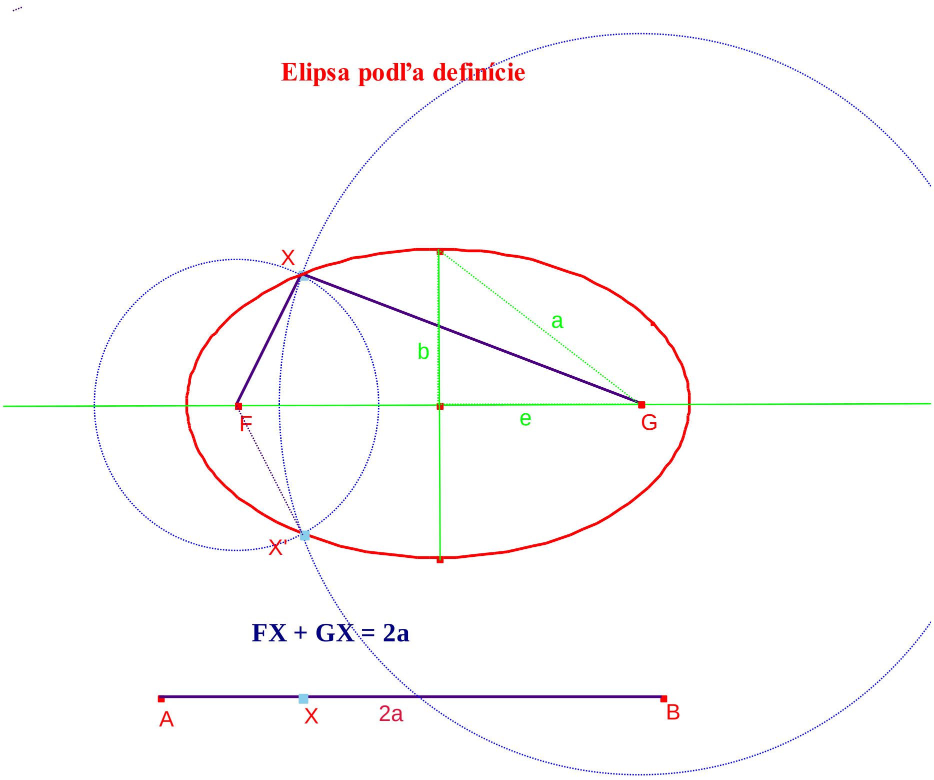
Po zvládnutí parametrických rovníc roviny, oboznamujeme žiakov so všeobecnou rovnicou roviny. Pri odvodzovaní tejto rovnice, zistíme, že súradnice normálového vektora roviny sú násobkami koeficientov a, b, c všeobecnej rovnice roviny. Toto demonštruje výkres „všeobecná rovnica roviny“. Zvláštne polohy rovín demonštrujeme pomocou výkresov rovnobežná s x, rovnobežná s y, rovnobežná s z,, rovnobežná s xy, rovnobežná s xz, rovnobežná s zy. Tu žiakov upozorníme na chýbajúce členy vo všeobecnej rovnici roviny. Výkres „priesečnica dvoch rovín“ demonštruje fakt, že smerový vektor roviny je násobkom vektorového súčinu normálových vektorov oboch rovín. Rovnobežné roviny a vzťah medzi ich normálovými vektormi demonštruje výkres „rovnobežné roviny“.

Aj tému vzájomná poloha lineárnych útvarov možno spestriť s podporou Cabri 3D. Vo výkresoch „rovnobežky“, rôznobežky“, mimobežky“ je klasifikovaná vzájomná poloha priamok pomocou vektorov.

Nástroje Cabri umožňujú demonštrovať a počítať aj metrické vlastnosti lineárnych útvarov. Vzhľadom k obmedzenému rozsahu sa tejto problematike nebudem podrobnejšie venovať. Tieto nástroje nám môžu pri výučbe dobre poslúžiť na kontrolu výpočtov, t. j. na spätnú väzbu.

Z témy „Kvadratické útvary“ je na základe osnov povinné učivo už iba kružnica a jej vzájomná poloha s priamkou. Napriek tomu, že Cabri II+ disponuje silnými nástrojmi, je dobré oboznámiť žiakov aj s ostatnými kužeľosečkami, ktorých štúdium je z hľadiska technickej praxe stále dôležité.

Výkres priamka a kružnica demonštruje vzájomnú polohu priamky a kružnice v sústave súradníc. Keďže Cabri „vie“ určiť súradnice ľubovoľného bodu v nákresni, môžeme ľahko určiť aj súradnice priesečníkov, pokiaľ existujú. Samozrejme, žiaci by mali poznať algoritmus ako tieto súradnice vypočítať, avšak už nie je potrebné drilovať tento postup, skôr sa zdá vhodnejšie riešiť konkrétnejšie problémy.



obr.5 Konštrukcia bodov elipsy

Pochopiteľne, tak ako získame priesečníky priamky a kružnice, môžeme určiť spoločné body aj iných útvarov, a to lineárnych aj kvadratických. Pomocou nástrojov Cabri je možné nakresliť ľubovoľnú kužeľosečku určenú piatimi bodmi a určiť aj jej rovnicu, čo je síce nad rámec osnov, ale je tu príležitosť oboznámiť žiakov so *všeobecnou rovnicou kužeľosečky*. Veľmi dôležité je, aby žiaci dôkladne zvládli definície všetkých kužeľosečiek. Najlepšie je, keď ich najskôr kreslia podľa definície, až potom by sa malo prejsť k ich *analytickému vyjadreniu*. Toto sa často zanedbáva, najmä ak učiteľ nemá v aprobácii deskriptívnu geometriu. Keď už kužeľosečky nebudeme rysovať, treba aspoň použiť výkresy „elipsadef“, „hyperboladef“ a „paraboladef“. Treba však vysvetliť konštrukciu bodu kužeľosečky aj pomocou „odkrytia“ príslušných pomocných útvarov (obr. 5).

3 Záver

Naše doterajšie niekoľkoročné skúsenosti s vyučovaním matematiky pomocou IKT, najmä Cabri geometrie, sú veľmi pozitívne. Z dotazníkov i z osobných rozhovorov so žiakmi sme zistili, že žiaci sú s takouto podporou vyučovania spokojní a veľmi ju oceňujú. Nakoľko vyučovanie matematiky je do značnej miery pojmotvorným procesom, sme sa v článku predovšetkým zamerali na postup *zavedenia pojmov z analytickej geometrie* vo výučbe. Preto nie sú v článku riešené konkrétne úlohy. Pri ich riešení je vhodné použiť známy program Derive, ktorý umožňuje zrýchliť mnohé numerické výpočty, v neposlednom rade aj graficky znázorniť výsledky, a to v rovine i v priestore. Ideálne by potom bolo, keby s počítačom pracovali aj žiaci, čo pri ich súčasných počtoch v triedach je problém. Počítačové učebne (aj „učebne Infoveku“) disponujú spravidla najviac 15 - 17 ks PC, takže pri počítači musia pracovať aspoň dvaja žiaci, čo má negatívny vplyv na efektívnosť vyučovacieho procesu.

Literatúra

[1] M.Hejný a kol.: Teórie vyučovania matematiky 2, Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava 1989.

Kontaktná adresa

RNDr. Karol Gajdoš
Gymnázium A.Merici v Trnave
Trnava, Hviezdoslavova 10
gajdos@gamtt.sk