Tvorivé experimentovanie v prostredí IKT – nástroj na zlepšenie matematického vnímania a myslenia študentov

Creative Experiments in ICT Environments - Tool to Improve Students´ Mathematical Perceptions

Lýdia Kontrová - Tomáš Lengyelfalusy

Abstract

This article presents results of pedagogical experiment carried out on high school students. This experiment focused on particular themes of curriculum - trigonometric functions, equations and inequalities. To make this form of education more appealing we utilized creative experimentation in virtual environment and didactical software Graphmatica. Our primary interest was to find how much their mathematical thinking improved. This improvement was caused by improved instantiation and visualization of mathematical terms through numerical and graphical models created by the computer. We then measured the amount of knowledge improvement achieved by the aforementioned means.

Keywords

Pedagogical experiment, creative experimentation, trigonometric functions, didactic software Graphmatica

1 Úvod

Pravdivosť tézy, že integrácia počítačov do edukačného procesu znamená príchod novej éry efektívnejšieho vyučovania a učenia sa potvrdzujú mnohé výskumy realizované u nás aj v zahraničí. Ich snahou je najčastejšie verifikovať (alebo vyvrátiť) hypotézy o tom, že počítače majú potenciál radikálne zmeniť rigidné, zaužívané pedagogické prístupy a zlepšiť výsledky študentov.

Počas nášho experimentu zameraného na aplikovanie nových metód vyučovania matematiky na stredných školách s využitím IKT, ktorý sme realizovali v období rokov 2004 až 2007, sme mali za cieľ v prvej etape najskôr vytvoriť scenáre vyučovacích hodín, ktoré by študentov nabádali k aktívnej a tvorivej činnosti, aby na základe vlastných skúseností získaných v procese vyučovania pomocou počítačových technológií sami prichádzali k novým matematickým pojmom, pravidlám a spôsobom riešenia matematických problémov. Súčasne bol kladený dôraz na takú vyučovaciu metódu, ktorá umožní študentom lepšie aplikovať matematiku pri riešení problémov reálneho života.

Z praxe vieme, že predpokladom k tomu, aby študent dokázal aplikovať matematiku v praxi, je aby jej skutočne porozumel. Matematike však rozumie len taký študent, ktorého *učenie nie je len pasívnou recepciou pojmov, imitáciou učiteľa alebo učením sa hotovej matematiky.* Matematike lepšie porozumie študent, ktorý je vo vyučovacom procese angažovaný, podnecovaný ku kladeniu otázok a hľadaniu odpovedí, *k tvorivej činnosti, aktívnemu zmocňovaniu sa matematických poznatkov experimentovaním*. Takúto metódu sme označili ako metódu „učenia sa činnosťou – alebo tiež *learning by doing*“ .

Našou snahou počas opisovaného experimentu bolo odpovedať na otázku, do akej miery môžu práve prostriedky IKT mobilizovať a pozitívne ovplyvňovať poznávací proces študenta.

2 Priebeh experimentu

V druhej etape práce bolo naším cieľom overiť pomocou pedagogického experimentu pozitívny vplyv využívania počítačových technológií pri vyučovaní matematiky na úroveň vedomostí študentov na SŠ. V priebehu dvoch rokov bolo vytvorených viac ako 42 pracovných listov a konceptov vyučovacích hodín z matematiky a realizovaných 51 vyučovacích hodín matematiky vo všetkých ročníkoch na SŠ. Pokúsili sme sa navrhnúť netradičné, zaujímavé a pritom efektívne aktivity, ktoré nielen oživili proces vyučovania, ale vniesli doň prvky novosti, spestrili monotónne precvičovania a pomohli pri fixácii poznatkov inovatívnym spôsobom. Spomenuté koncepty vyučovacích hodín boli už v minulosti obsahom viacerých publikovaných článkov.

Scenáre vyučovacích hodín boli koncipované v úzkej nadväznosti na v súčasnosti najpoužívanejšie učebnice matematiky na stredných školách, ktorých autorom je *Tomáš Hecht: Matematika pre gymnáziá a SOŠ*.

Pozornosť sme upriamili predovšetkým na tie témy, s ktorými buď majú študenti väčšie problémy, (*umožnili sme im lepšie nahliadnuť na dané pojmy pomocou ich vizualizácie, heurisrickej simulácie či konkretizácie s podporou IKT),* alebo nízka časová dotácia pri ich preberaní nedáva priestor pre ich dostatočné zafixovanie a precvičenie (*s využitím počítača dokážeme za ten istý časový úsek* *pojať viac učiva)*. Pri každej téme sme integrovali vhodné aktivity do vyučovacieho procesu v súlade s učebným a časovým plánom tematického celku v rámci platných učebných osnov. Technická náročnosť realizácie nášho experimentu nám žiaľ neumožnila pracovať s jednou experimentálnou skupinou počas celého školského roku, preto boli predmetom nášho experimentu len vybrané tematické celky stredoškolského učiva a časovo obmedzené úseky vyučovania.

V článku predstavíme pracovný list a postup vyučovania, ktorý sme použili pri preberaní tematického celku *Goniometrické funkcie, rovnice a nerovnice* v druhom ročníku gymnázia a výsledky pedagogického experimentu viažuce sa k tejto téme.

Počas pedagogického experimentu sme sa zamerali na riešenie výskumného problému kauzálneho typu, ktorý sme stanovili nasledovne:

- *Aký vplyv má využívanie počítačových technológií pri vyučovaní matematiky na SŠ na výkony žiakov a ich postoj k tomuto predmetu?*

Ako výsledok nášho experimentu sme očakávali:

- Potvrdenie pozitívneho vplyvu využívania počítačových technológií a metódy *„learning by doing“* v procese vyučovania matematiky na rozvoj tvorivého myslenia študentov a tiež na úroveň ich vedomostí.

Na základe formulácie výskumného problému sme pre verifikáciu stanovili nasledujúce hypotézy.

H1: Žiaci vzdelávaní formou aktívnej činnosti „learning by doing“ prostredníctvom počítačových technológií dosiahnu na konci experimentálneho vyučovania minimálne rovnocennú úroveň vedomostí ako žiaci vyučovaní bez počítačových technológií.

Pomocné hypotézy prináležiace k hlavnej hypotéze H1:

- *H1.1: Úroveň vedomostí u žiakov, ktorí používali pri vyučovaní matematiky počítačové technológie bola pri riešení úloh z oblasti goniometrických funkcií rovnocenná ako u žiakov vzdelávaných bez IKT.*
- *H1.2: Úroveň vedomostí u žiakov, ktorí používali pri vyučovaní matematiky počítačové technológie bola pri riešení neštandardných matematických úloh z oblasti goniometrických funkcií vyššia ako u žiakov vzdelávaných bez IKT.*

2.1 Verifikácia hypotézy H1

Problematika goniometrických funkcií, rovníc a nerovníc bola odučená v školskom roku 2006/2007 v paralelných triedach podľa toho istého učebného plánu v sexte na Gymnáziu v Žiline a na Gymnáziu v Považskej Bystrici.

Pri našom experimente sme pracovali s jednou experimentálnou a jednou kontrolnou skupinou. Spolu sa na experimente zúčastnilo 56 žiakov; 28 študentov Gymnázia v Žiline i (títo tvorili experimentálnu skupinu) a 28 študentov Gymnázia v Považskej Bystrici (títo tvorili kontrolnú skupinu). Nato, aby sme mohli experiment kvalifikovať ako relevantný bolo potrebné zvoliť dve čo najviac rovnocenné skupiny. Pri výbere subjektov experimentu a v snahe o získanie dvoch čo najviac ekvivalentných skupín sme sa rozhodli pre náhodný výber zo žiakov osemročných gymnázií, ktorí boli prijímaní na štúdium podľa porovnateľných IQ testov. tieto skupiny majú blízke hodnoty základných ukazovateľov (vek, prospech, hodnoty IQ testu).

Do vyučovania v experimentálnej skupine boli zaradené raz v týždni hodiny v počítačovej učebni. Išlo o hodiny, ktorých cieľom bolo fixovanie a upevňovanie učiva zvolenej problematiky. Zvolili sme formu pracovných listov, na ktorých boli presne špecifikované aktivity a úlohy pre žiakov. Žiaci pracovali prevažne samostatne, učiteľ mal priestor pre individuálne usmerňovanie dvojíc. Cieľom aktivít bolo tvorivé hľadanie odpovedí na presne položené otázky, odhaľovanie súvislostí a učenie sa v procese aktívnej činnosti (*learning by doing*). Záver každej hodiny tvorila heuristická beseda a spoločné diskusné fórum o riešených zadaniach.

Pracovný list obsahoval tieto aktivity:

Aktivita 1

a) Nakreslite do jedného obrázku grafy funkcií:

- y = sin(x)
- y = sin(4x)
- y = sin (0,5x)

Nakreslite do ďalšieho obrázku grafy funkcií

- y = cos(x)
- y = cos(6x)
- y = cos(0,25x)

Pozorujte grafy funkcií, formulujte tvrdenie týkajúce sa zmeny periódy funkcií typu

y = cos(k. x) v závislosti na parametri *k.*

b) Nakreslite do jedného obrázku grafy funkcií :

- y= cos(x)
- y= 4cos(x)
- y= 0,5cos(x)

Nakreslite do ďalšieho obrázku grafy funkcií:

- y = sin(x)
- y = 3sin(x)
- y = 0,25 sin(x)

Pozorujte grafy funkcií a vyslovte závery týkajúce sa zmeny oboru hodnnôt funkcií tvaru

y = k.sin(x).

c) Narysujte grafy funkcií:

- y = cos(x) + 2
- y = cos(x) - 5
- y = sin(2x) + 3
- y = sin(0,5x) -1

Aké zmeny nastávajú v prípade grafov funkcií tvaru *y = cos(x) + k!*

d) Nakreslite grafy funkcií:

- y = sin(x)
- y = sin(x+π)
- y = sin(x-π/4)
- y = 2cos(x+π)

Vyslovte tvrdenie týkajúce sa vlastností a tvaru grafov funkcií typu *y = sin(x+a)!*

Aktivita 2

Nakreslite grafy funkcií:

- y = sin(2x)
- y = -sin(2x)
- y = sin(-2x)
- y = - sin (-2x)

- y = cos(2x)
- y = -cos(2x)
- y = cos(-2x)
- y = - cos (-2x)

Odpovedzte postupne na otázky:

Je graf funkcie y = sin(x) symetrický? Akú súmernosť pozorujete?

Ako sa zmení graf funkcie y = sin(-2x) vzhľadom na graf funkcie y = sin(2x)?

Aký je vzťah grafov funkcií y= sin(-2x) a y= -sin(-2x)? Zdôvodnite! Analogicky postupujte v b).

Aktivita 3

Do jedného obrázku zakreslite grafy funkcií :

- y = cos(x)
- y= -cos(x)
- y = sin(x-(π/2))
- y = sin(x+(π/2))

Na základe výsledkov pozorovaní získaných grafických modelov doplňte rovnosť:

sin (x+π/2) =

sin (x-π/2) =

- y = sin(x)
- y= -sin(x)
- y = cos(x-(π/2))
- y = cos(x+(π/2))

cos(x+π/2) =

cos(x- π/2) =

Aktivita 4

Na základe poznatkov získaných počas aktivity 1 načrtnite grafy funkcií:

a) y = 3sin(x-π/2) +1

b) y = 2cos(2x+π) -2

Výsledky overte pomocou programu Graphmatica.

Aktivita 5

Napíšte predpis funkcie tvaru ***y = a.sin(b.x) + c,*** ktorá nadobúda maximálnu hodnotu 6, minimálnu hodnotu 2 a jej perióda je *p=π/3.* Výsledky overte graficky!

Aktivita 6

Hĺbka oceánu sa na istom mieste mení počas dňa periodicky; *s periódou 24 hodín,* v rozpätí od 10*m* po 18*m* a môžeme ju vyjadriť pomocou funkcie *y = a.sin(k.x) + b.* Akú časť dňa je hĺbka oceánu väčšia ako 16 metrov? Graficky znázornite!

Aktivita 7

Pomocou programu Graphmatica overte platnosť goniometrických vzorcov:

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $2\sin(x).\cos(x) = \sin(2x)$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\cos^2 x = (1+\cos(2x))/2$

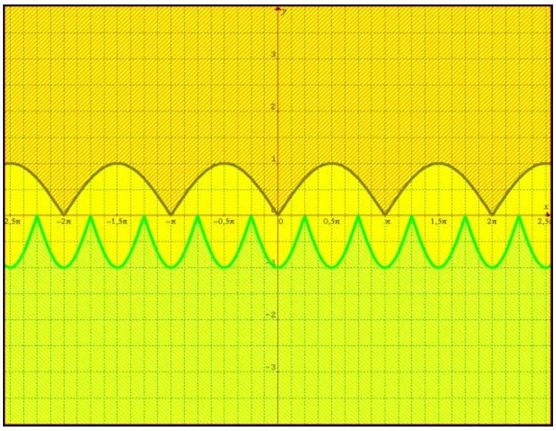
Aktivita 8

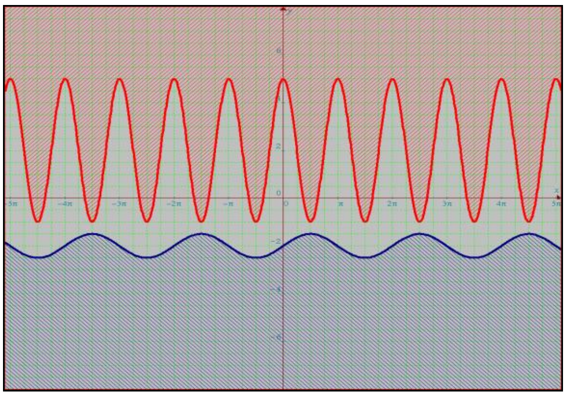
Riešte goniometrické rovnice. Využite program Graphmatica ako spätnú väzbu a tiež na vizualizáciu získaných výsledkov.

$\sin(2x).\cos(x) = \sin(x)$
$\sin(x) + \cos(x) = 2$
$\cos^2(x) - \cos(x) + 1/4 = 0$
$3\sin(x) + 4\cos(x) = 5$

Aktivita 9

Pomocou systému goniometrických nerovníc popíšte vyšrafovanú časť plochy na obrázku. Po zväčšení obrázku je možné lepšie odčítať hodnoty jednotlivých premenných, potrebné k správnemu vyriešeniu úlohy.





Obr. 1 Zadanie a)
Obr. 2 Zadanie b)

Pri riešení úloh študenti používali program Graphmatica, s používaním ktorého sa zoznámili už na predchádzajúcich hodinách pri preberaní tematického celku *Funkcie I*. Študenti využívali predovšetkým vlastnosť programu vykresliť do jedného grafického okna množinu funkcií s jedným parametrom. Vďaka didaktickému softvéru mohli sledovať aký vplyv má meniaci sa parameter v zápise zloženej goniometrickej funkcie *y = a.cos(bx+c)+d* na graf funkcie, obor funkčných hodnôt, nulové body či jej periódu. Navyše použitie IKT umožnilo študentom testovať omnoho viac prípadov funkcií (pracovať s väčším množstvom konkrétnych modelov) ako pri klasickom vyučovaní. Následné zovšeobecňovanie získaných výsledkov a formulovanie záverov bolo úspešnejšie.

Pri vytváraní grafov goniometrických funkcií využívali študenti formátovanie grafického okna programu postupnosťou príkazov z *Menu programu* v poradí *Option* → *Graph Paper*→ *Trig.* Takéto nastavenie zabezpečí, že mierka na *osi x* je normovaná násobkami čísla π, čo je vhodné práve pri týchto cvičeniach.

Kontrolná skupina absolvovala tradičné vyučovanie o goniometrických funkciách.

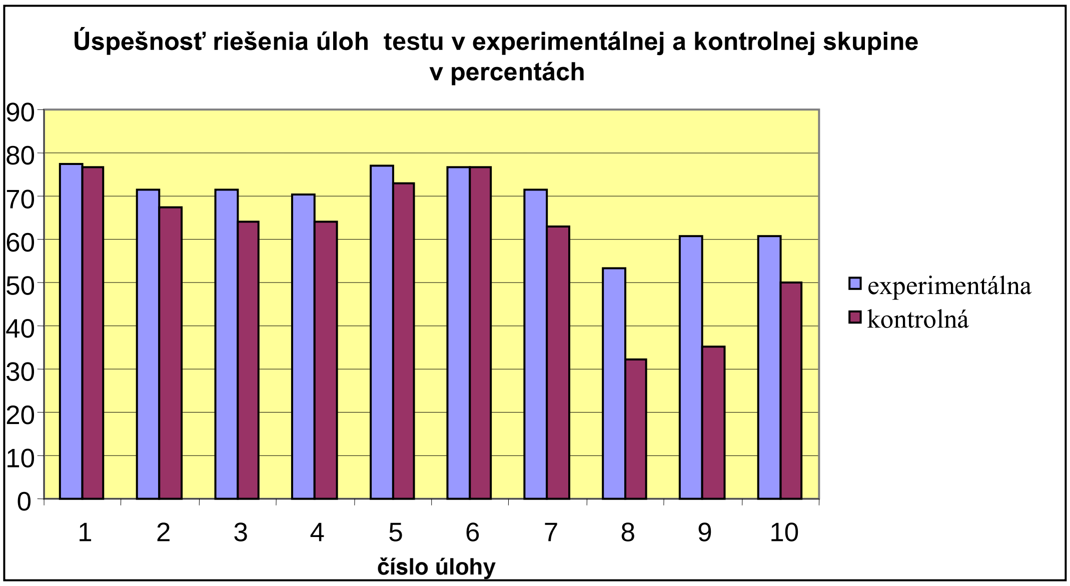
Po prebratí učiva obe skupiny riešili zhodný vedomostný didaktický test, ktorý obsahoval 10 úloh; 6 bolo štandardného typu a 4 môžeme označiť ako úlohy neštandardného typu, ktoré vyžadujú pri riešení istú dávku kreativity a „dobrý nápad“. Úlohy však nemali mimoriadnu obtiažnosť.

2.2 Kvantitatívna analýza výsledkov experimentu

Najskôr uvedieme tabuľku a graf úspešnosti riešenia úloh testu *Goniometrické funkcie* v experimentálnej a kontrolnej skupine v percentách.

Tabuľka 1

číslo úlohy	*1.*	*2.*	*3.*	*4.*	*5.*	*6.*	*7.*	*8.*	*9.*	*10.*
Experimentálna skupina [%]	77,3	71,4	71,6	70,5	77	76,8	70,4	53,2	60,7	61
Kontrolná skupina [%]	76,8	67,5	64,2	64,2	73,1	75,8	63,1	32,1	35,1	50,1



Obr.3 Graf úspešnosti riešenia úloh post testu Goniometrické funkcie

Z grafu môžeme vidieť, že žiaci v experimentálnej skupine boli úspešnejší predovšetkým pri riešení úloh 7,8,9,10. Žiaci kontrolnej skupiny zas vykazujú porovnateľné výsledky pri prvých šiestich úlohách, zaostávanie je zjavné pri neštandardných úlohách. Nasledujúca tabuľka poukazuje na percentuálnu úspešnosť v rámci celého testu i parciálne výsledky pre štandardné a neštandardné úlohy.

Tabuľka 2 . Úspešnosť riešenia didaktického testu

	Celková úspešnosť		**Štandardné úlohy**		**Neštandardé úlohy**	
Experimentálna.	*69,1%*	**23,5 bodov**	*74,1%*	**15,6bodov**	*60,9%*	**7,9bodov**
Kontrolná	*60.1%*	**20,4 bodov**	*69,8%*	**14,7bodov**	*44,2%*	**5,7bodov**

Pristúpime k verifikácii hypotéz. Zvolíme hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$. Účinok experimentálnej metódy (dosiahnuté výsledky testu pri vyučovaní matematiky prostredníctvom IKT) sme považovali za náhodný výber z normálneho rozdelenia $N(\mu_1, \sigma_1^2)$. Účinky druhej metódy (výsledky testu pri tradičnom vyučovaní) sme považovali za náhodný výber z normálneho rozdelenia $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, kde μ_1, σ_1^2, μ_2, σ_2^2 sú neznáme parametre. Máme dané dva nezávislé súbory $n = 28$, $m = 28$. Vypočítame výberové charakteristiky a použitím *F - testu* zistíme či rozdiel medzi ich rozptylmi je štatisticky významný.

Tabuľka 3 Základné štatistické charakteristiky oboch súborov

veličina	***n***	**$\bar{x}$ (priemer získaných bodov)**	**s_x^2(rozptyl)**
Experimentálna skupina	**28**	**23,5**	**26,8**
Kontrolná skupina	**28**	**20,4**	**23,7**

Testujeme hypotézu H_0 : rozptyly základných súborov sú rovnaké proti H_1 : rozptyly základných súborov sú rôzne, teda: $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti $H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$. Testovacia charakteristika nadobudla hodnotu $F = 0{,}750895$.

Kritické hodnoty *F rozdelenia* pri hranici významnosti $\alpha = 0{,}05$ sú podľa tabuľky:

$F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1) = F_{0,975}(27, 27) = 0{,}4587$

$F_{\alpha/2}(27,27) = 2{,}1824$

Hypotézu zamietame na hladine významnosti α, ak $F \leq F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1)$ *alebo*

$F \geq F_{\alpha/2}(n-1, m-1)$

Pretože platí $F = 0{,}750895 > F_{0,975}(27,27) = 0{,}4587$ *hypotézu H_0 na hladine významnosti α =0,05 nezamietame; rozdiel medzi rozptylmi nie je štatisticky významný.*

Rozdielnosť medzi skupinami sme následne testovali dvojvýberovým Studentovým *t - testom* s rovnosťou rozptylu. Testovali sme hypotézu o tom, či účinky oboch vyučovacích metód sú rovnaké:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ proti H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$

Testovacie štatistiky získané pomocou MS Excelu majú hodnotu $T = 2{,}276$ a hodnota $p = 0{,}01313$. *P je pravdepodobnosť chyby, akej sa dopustíme, keď zamietneme testovanú hypotézu. Ak p< 0,05 hypotézu H_0 zamietam; p- hodnota v tomto prípade svedčí jednoznačne v neprospech nulovej hypotézy H_0 .*

Pri porovnaní s kritickými hodnotami *t-testu* sme dostali:

$T = 2{,}276 > t_{0,05}(54) = 2{,}0048$

Nulovú hypotézu preto zamietame. Výberový priemer sa na zvolenej hladine významnosti líši od známej hodnoty priemeru základného súboru.

Interpretácia výsledkov

Medzi vyučovacími metódami bol rozdiel.

Ak použijeme jednostrannú alternatívu a testujeme hypotézu:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ proti H_1: $\mu_1 > \mu_2$

H_0 zamietame na hladine významnosti α ak $T > t_{2\alpha}(n+m-2)$ sa v našom prípade potvrdilo: 2,276 > $\mathbf{t}_{2\alpha}(n+m-2) = \mathbf{t}_{0,1}(54) = 1,676$.

Jednostrannú nulovú hypotézu preto zamietame a rozdiel medzi strednými hodnotami považujeme za štatisticky významný.Overili sme platnosť hypotézy **H1.1.**

Na verifikáciu pomocnej hypotézy H1.2 sme použili analogický postup.

Vypočítali sme opäť výberové charakteristiky s použitím *F-testu*. Zistili sme, že rozdiel medzi rozptylmi je štatisticky významý. Následne sme použili jednostranný dvojvýberový Studentov *t-test* na overenie jednostrannej alternatívy:

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ proti H_1: $\mu_1 > \mu_2$

Nech $\alpha = 0,05$
Získali sme tieto štatistické charakteristiky:

Experimentálna skupina	***Kontrolná skupina***
Priemer: 7,92 bodov ***Rozptyl: 4,365***	***Priemer: 5,76*** ***Rozptyl: 3,00***
Vypočítaná hodnota F- testu: F= 0,6872 ***Kritické hodnoty F- testu:*** $F_{1-\alpha/2}(n-1,m-1) = F_{0,975}(27, 27) = 0,4587$ $F_{0,025}(27,27) = 2,1824$ ***Vypočítaná hodnota t-testu: T = 4,14*** ***Kritické hodnoty t-testu:*** $t_{2\alpha}(n+m-2)=t_{0,1}(54)= 1,676$	

Platí 4,14 >1,676 teda $T > t_{0,1}(54)$, preto H_0 zamietame a prijímame alternatívnu hypotézu H_1. Nulovú hypotézu zamietame a tvrdíme, že sa výberový priemer na zvolenej hladine významnosti líši od známej hodnoty priemeru základného súboru.

Interpretácia výsledkov

Rozdiel medzi dosiahnutými výsledkami v teste pri riešení neštandardných úloh v experimentálnej a kontrolnej skupine žiakov je štatisticky významný. Overili sme platnosť hypotézy H1.2.

Pomocou štatistických metód sa potvrdila efektivita zaraďovania inovatívnych vyučovacích postupov s využitím počítača do vyučovania matematiky, ako prostriedku na zvyšovanie výkonu žiakov.

3 Záver

Výsledky nášho experimentu korešpondujú so závermi viacerých výskumov z oblasti využívania počítačov na hodinách matematiky. Potvrdil sa pozitívny vplyv a účinnosť aplikovania počítačových technológií predovšetkým v oblasti nárastu konštruktívnej aktivity a motivácie študentov počas vyučovania. Študenti sa cítili na hodinách viac objaviteľmi nových poznatkov, viac tvorcami svojho vlastného poznania. Aj slabší žiaci sa na dobre zorganizovanej hodine pokúšali dospieť k riešeniu, neboli natoľko pasívni a rezignovaní ako pri klasickom vyučovaní.

Poznámka: Popisovaný experiment bol realizovaný s podporou projektu KEGA /09 doc. PaedDr. T. Lengyelfalusy, CSc. - zodpovedný riešiteľ, riešiteľské obdobie 2009 – 2011.

Názov úlohy: Cieľom vyučovania matematiky je šťastný človek

Literatúra

[1] Kakol, H.: Środki dydaktyczne w procesie myślenia twórczego, Prace Monograficzne Wyższej Szkoły Pedagogicznej w Krakowie, T. 134, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1991.

[2] Forgasz, H.: Girls, boys, and computers for mathematics learning. Keynote address, annual conference of the Mathematical Association of Victoria. (2003).

[3] Žilková, K.: Symbióza matematických a algoritmických postupov v tabuľkových kalkulátoroch. In.: IKT vo vyučovaní matematiky. Prírodovedec č.199. FPV UKF Nitra.2005. ISBN 80-8050-925-5

Kontaktná adresa

doc. PaedDr. Tomáš Lengyelfalusy, CSc.
Katedra matematiky, FPV ŽU
Univerzitná 1, 010 26 Žilina
tomas.lengyelfalusy@fpv.uniza.sk

PaedDr. Lýdia Kontrová, PhD.
Katedra matematiky, FPV ŽU
Univerzitná 1, 010 26 Žilina
lydia.kontrova@fpv.uniza.sk