

Programy dynamické geometrie a jejich využití ve výuce stereometrie

Dynamic Geometric Programs and Their Use in Teaching Stereometry



Jarmila Robová

Abstract

The article discusses the contribution of dynamic geometric programs to teaching of stereometry in high school and warns against some pitfalls associated with their use. Several specific examples are presented – positional and metric problems, investigating the sets of points of given properties in space.

Keywords

Cabri 3D, teaching, stereometry, spatial imagination, heuristic methods

1 Úvod

V posledních letech můžeme pozorovat postupné snižování úrovně znalostí a dovedností z geometrie u absolventů základních a středních škol. Více než s řešením planimetrických úloh mívají tito žáci potíže s třídimenzionálními problémy. Obecně můžeme hovořit o klesající úrovni geometrického myšlení a prostorové představivosti u současných žáků, někteří autoři uvádějí, že situace se v průběhu několika posledních desetiletích výrazně zhoršila [2], [4], [7].

Příčin této situace je celá řada, k těm hlavním patří klesající počty hodin matematiky na školách a nedostatek času na procvičení látky, neoblíbenost geometrie u žáků aj. Především úlohy ze syntetické geometrie bývají pro žáky obtížnější, neboť syntetická řešení úloh jsou v porovnání s poněkud algoritmickými postupy analytické geometrie náročnější na myšlení, a tím obecně obtížnější. Syntetický přístup k řešení úloh vyžaduje jistý nadhled ze strany žáků nad danou problematikou, konkrétně nadhled nad vlastnostmi geometrických objektů, který je podporovaný geometrickou představivostí a schopností aktivně využívat vědomosti a kombinovat je v průběhu řešení. K tomu, aby žáci tyto dovednosti a nadhled získali, je třeba látku dostatečně procvičit.

Jednou z cest, která může přispět ke zlepšení situace, je využívání dynamických geometrických programů. Zkušenosti a výsledky z vyučování geometrie s podporou těchto programů ukazují, že výukové programy přinášejí do školské geometrie řadu pozitivních prvků.

Následující možnosti využití programů dynamické geometrie vycházejí ze zkušeností získaných ve výuce předmětů *Aplikace počítačů ve výuce geometrie I a II*, *Geometrie I* a *Základy zobrazovacích metod* pro budoucí středoškolské učitele matematiky na MFF UK v Praze.

2 Podpora a rozvíjení prostorové představivosti

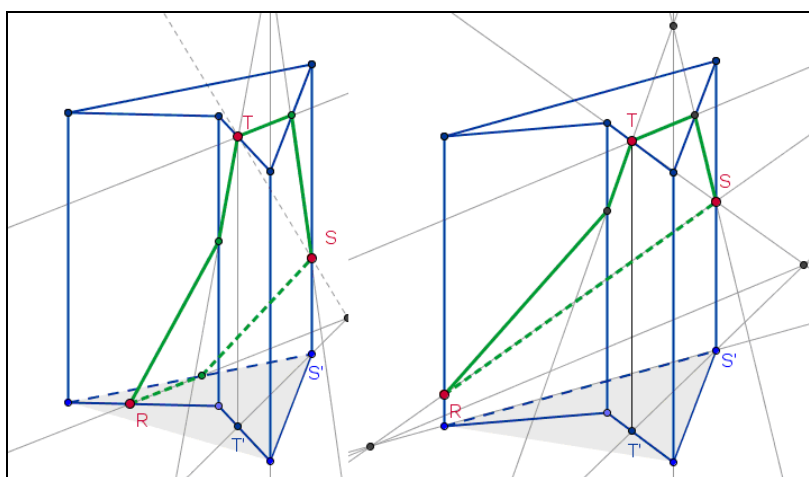
Prostorová představivost je součástí geometrické představivosti a v užším slova smyslu jí rozumíme souhrn schopností, které souvisejí s představami jedince o prostoru, geometrických objektech, jejich vlastnostech a vzájemných vztazích. Řada odborníků považuje za nejdůležitější období pro rozvoj prostorové představivosti předškolní a mladší školní věk. Z pohledu psychologů a rozvoje geometrické představivosti jsou to jistě nezastupitelná období, avšak i později lze geometrické myšlení a prostorovou představivost žáků rozvíjet, i když jde o pomalejší a dlouhodobější proces, ve kterém se využívá především logické myšlení jedince.

Pro rozvoj prostorové představivosti je důležitý vlastní prožitek a zkušenost. Je proto nezbytné, aby žák pracoval v hodinách geometrie s prostorovými objekty a modeloval si prostorové situace. Nelze se tedy domnívat, že výuka stereometrie může být realizována především za podpory počítače. Je důležité, aby etapě virtuálních manipulací v počítačovém 3D prostředí předcházela manipulace s reálnými objekty [9].

Pro počítačové modelování prostorových situací mohou být využívány rovněž i planimetrické dynamické programy. V těchto programech lze sestavovat obrazy třídimenzionálních objektů s využitím různých zobrazovacích metod, a to zejména kosoúhlého promítání. Používání dynamických planimetrických programů ve výuce stereometrie je vhodné především v hodinách,

kdy se žáci učí zobrazovat jednotlivá tělesa, především mnohostěny. Pokud žáci vytvářejí dynamické rysy těchto těles, seznamují se důkladně nejen s jejich vlastnostmi, ale současně si uvědomují vliv použité zobrazovací metody na výsledný obraz, a tím se také formují jejich představy o prostoru a zobrazování prostorových útvarů.

Později, když žáci probírají řezy mnohostěnů, umožní jim planimetrické programy sestavit řez daného tělesa rovinou obdobným způsobem, jako při rýsování pravítkem a kružítkem do sešitu. V takových situacích 2D programy slouží zejména jako prostředek pro rychlé a přesné rýsování. Učitel může díky technické podpoře programu zařadit do výuky i méně tradiční tělesa, jako jsou například nekonvexní mnohostěny, jejichž řezy jsou náročné na preciznost provedení. Díky dynamickým atributům programu mohou žáci po sestrojení měnit polohu bodů, které určují rovinu řezu, a sledovat odpovídající změny v průniku tělesa a roviny (obr. 1). Jiné příklady využití 2D programů k 3D modelování a k rozvoji prostorové představitosti lze nalézt v [3].



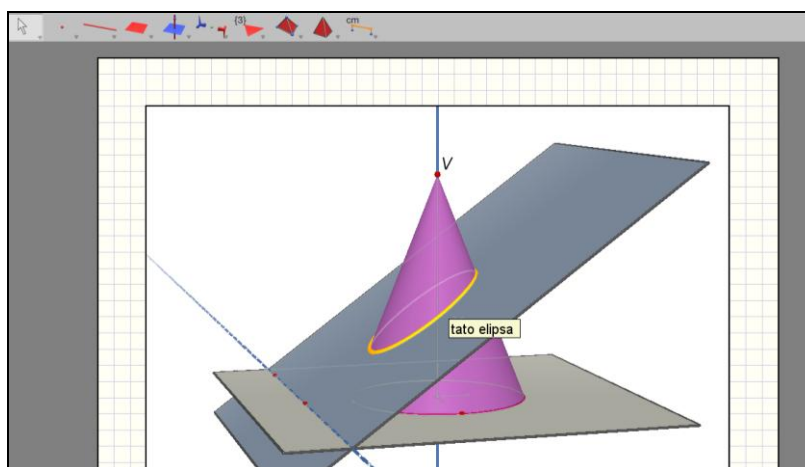
Obr. 1 Řez nekonvexního mnohostěnu v programu Geogebra

I když planimetrické dynamické programy umožňují zobrazování a modelování prostorových situací, je vhodnější používat při počítačové podpoře výuky stereometrie a rozvoje prostorové představitosti kvalitní 3D programy. Grafické prostředí těchto programů jednak lépe evokuje v mysli žáků třídimenzionální prostor, jednak umožňuje měnit úhel pohledu na zobrazenou situaci. Současně jsou v 3D prostředí k dispozici příkazy pro práci s tělesy a dalšími prostorovými objekty, což usnadní žákům rýsování a urychlí realizaci řešení prostorových úloh.

3 Metody a formy využívání dynamického software ve výuce stereometrie

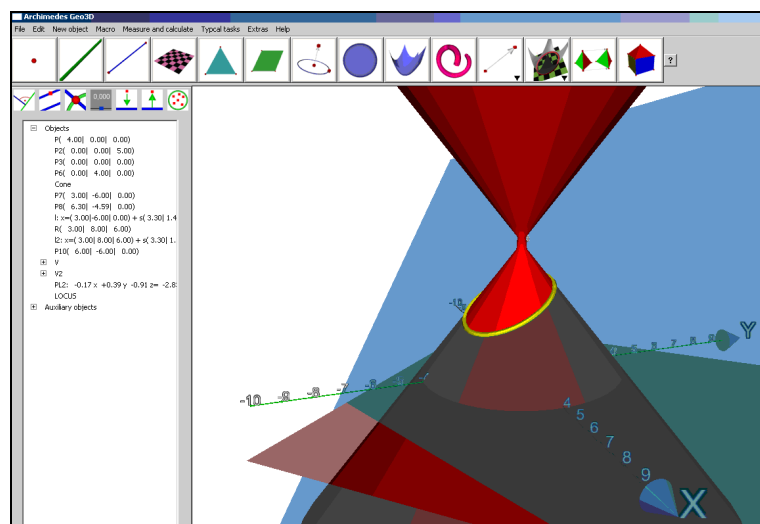
Pro výuku stereometrie existují různé dynamické programy, ale jen málo z nich v současné době pokrývá svými příkazy potřeby výuky na střední škole. Ke komplexním 3D programům, které lze pro středoškolskou geometrii doporučit, patří *Cabri 3D* [10] či *Archimedes Geo3D* [11]. Komerční program *Cabri 3D* (obr. 2) více respektuje školské potřeby, což je patrné z jeho celkové koncepce.

Je vybaven nejen příkazy pro řešení polohových i metrických úloh, ale obsahuje i dynamické nástroje jako příkaz *Stopa*, *Pohyb*. Má velmi kvalitní grafické prostředí.



Obr. 2 Řez kuželové plochy v Cabri 3D

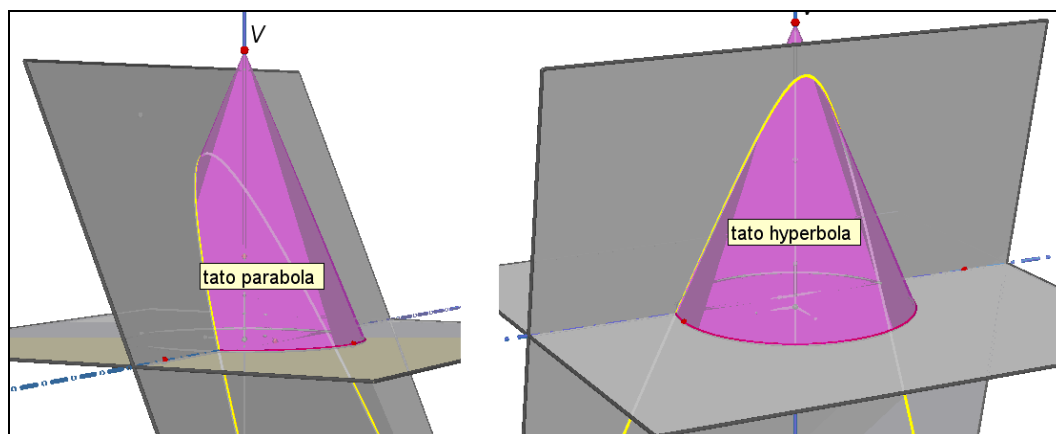
Program *Archimedes Geo3D* (obr. 3) je distribuován ve verzi shareware, při jeho dlouhodobějším používání je třeba zaplatit registrační poplatek. Nabízí nejen stejné nástroje jako *Cabri 3D*, ale uživatel zde nalezne i příkazy pro vytváření množin bodů, některých ploch a makrokonstrukcí. Tím jsou zvýšeny možnosti využití programu ve výuce, a to především při zařazení konstruktivistických metod. Ovládání programu je však náročnější a méně intuitivní, než je tomu u *Cabri 3D*.



Obr. 3 Řez kuželové plochy v Archimedes Geo3D

Geometrický software 3D můžeme ve výuce využívat různými způsoby. K základním možnostem patří **zobrazování prostorových objektů a dynamické demonstrování vztahů** mezi nimi. Programy 3D usnadňují především implementaci **heuristických postupů a konstruktivistického přístupu** k výuce některých témat. Můžeme například nechat žáky, aby zkoumali, jaká křivka

vzniká při řezu kuželové plochy rovinou. Program *Cabri 3D* je vybaven příkazem pro konstrukci kužele i pro průnik ploch, takže tuto křivku žáci velmi rychle sestojí. Dynamickou změnou vzájemné polohy roviny a pláště kužele pak žáci získávají různé kuželosečky a formulují podmínky pro jejich vznik pomocí vzájemné polohy roviny a pláště kužele (obr. 2, obr. 4).



Obr. 4 Řez kuželové plochy v *Cabri 3D* – parabola, hyperbola

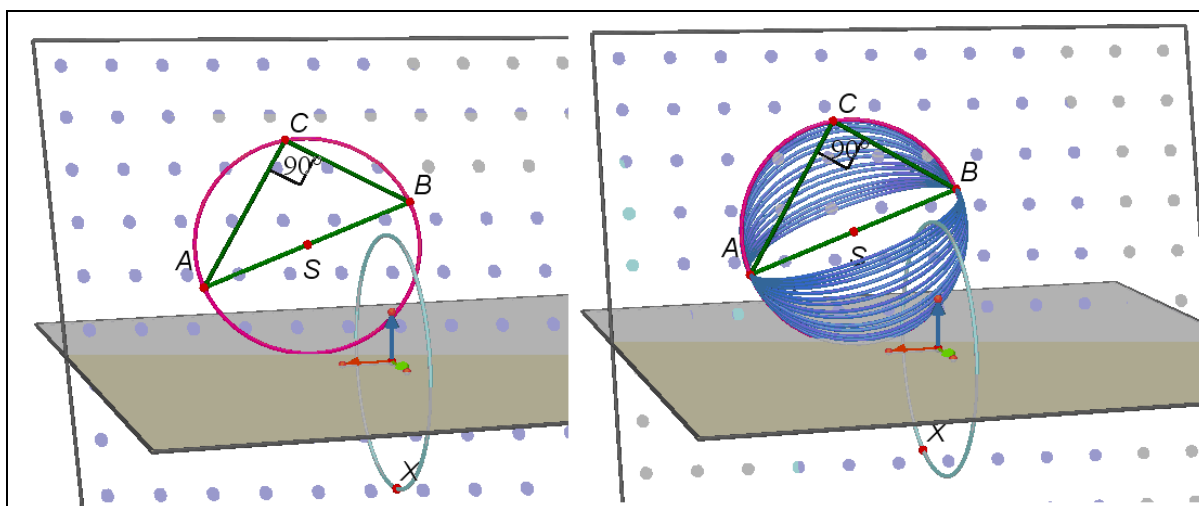
Vizualizace prostorových objektů a vztahů mezi nimi není jediným přínosem 3D programů. Důležitou roli hrají především jejich dynamické atributy, neboť díky snadné realizaci změn v rysu lze nalezené vztahy prověřovat a zobecňovat. Zmíněné nástroje pomáhají žákům zejména při experimentování a hledání hypotézy. V případě zařazování heuristických postupů s podporou počítačového modelování žáci při řešení problémů postupně procházejí následujícími etapami:

- etapa experimentování s objekty v rysu s využitím dynamických nástrojů programu,
- etapa objevení a formulování hypotézy včetně jejího prověření nástroji dostupnými v programu dynamické geometrie,
- etapa teoretického zdůvodnění, důkazu hypotézy.

Důsledkem používání dynamického software je kromě zvýšení názornosti vyučování také rozvíjení samostatnosti žáků a jejich tvořivosti, neboť experimentování se stává důležitou složkou induktivních postupů. Učitel by měl žáky vést k systematickému experimentování, které vychází z logicky promyšleného postupu, nikoliv jen z nahodilých manipulací. I když žáci zejména v počáteční etapě experimentování s objekty v rysu často pracují bez vědomé strategie, učitel je formou vhodně zadaných dílčích úkolů a problémových otázek může vést k tomu, aby si všímali probíhajících změn v rysu a dávali je do souvislostí. Je důležité, aby žáci nejen manipulovali s objekty v rysu, ale i slovně popisovali, co vidí a k jakým zjištěním dospěli [1]. To vše napomáhá nejen rozvíjet úroveň žákovských poznatků z geometrie, ale umožňuje učiteli bezprostředně vyvracet chybné představy, ke kterým mohou žáci při experimentování dospět. V etapě objevení a formulování hypotézy hraje důležitou roli pomoc učitele, případně diskuze se spolužáky, neboť k samostatnému objevení náročnějšího poznatku dospějí především nadaní žáci. Poslední etapa – teoretické zdůvodnění objevených vztahů – má převážně deduktivní charakter a patří k obtížným fázím. Přírozeným způsobem zde dochází k propojení induktivních a deduktivních postupů tak, jak je to v matematice běžné.

Dynamické programy může učitel se žáky využívat při vyšetřování množin bodů dané vlastnosti, které jsou analogické k těm, které žáci znají z roviny. Použití analogie pomáhá žákům při vytváření koncepce rysu, s jehož pomocí dále experimentují a hledají požadovanou množinu. Východiskem k objevení množiny je vlastní experimentální činnost žáka a jeho následná analýza získaných poznatků, k níž dochází většinou za pomoci učitele. Tuto možnost ilustruje následující příklad.

Žáci mají za úkol určit množinu všech bodů v prostoru, z nichž je vidět danou nenulovou úsečku AB pod pravým úhlem. Při řešení této úlohy se mohou žáci opřít o analogii z roviny – Thaletovu kružnici. Měli by si uvědomit, sami či s pomocí učitele, že v prostoru lze úsečkou AB obecně proložit nekonečně mnoho rovin. I když úlohu řeší převedením na rovinný problém volbou jedné konkrétní roviny, pomocí dynamických nástrojů následně v programu realizují změnu polohy zvolené roviny. Nejprve tedy sestrojí úsečku AB a libovolný bod X , který umístí na pomocnou kružnici. Nekolineárními body A, B, X proloží rovinu a zkonstruují v ní Thaletovu kružnici nad průměrem AB . Body této kružnice patří do hledané množiny. Se změnou polohy bodu X na pomocné kružnici mění polohu i rovina ABX v prostoru, a tím i sestrojená Thaletova kružnice. Po zapnutí stopy této kružnice žáci získávají další body hledané množiny (obr. 5). Na základě práce s dynamickým rysem dospějí k hypotéze, že hledanou množinou je kulová plocha nad průměrem AB (s výjimkou bodů A, B).



Obr. 5 Cabri 3D – analogie Thaletovy věty v prostoru

Řešení problémů na vyšetřování množin bodů dané vlastnosti v prostoru představuje pro žáky úkol, který klade značné nároky na jejich prostorovou představivost a logické myšlení. Program dynamické geometrie žákům pomáhá zejména v etapě objevování vazeb mezi danými prvky a hledanými body, a tím napomáhá formulování hypotézy.

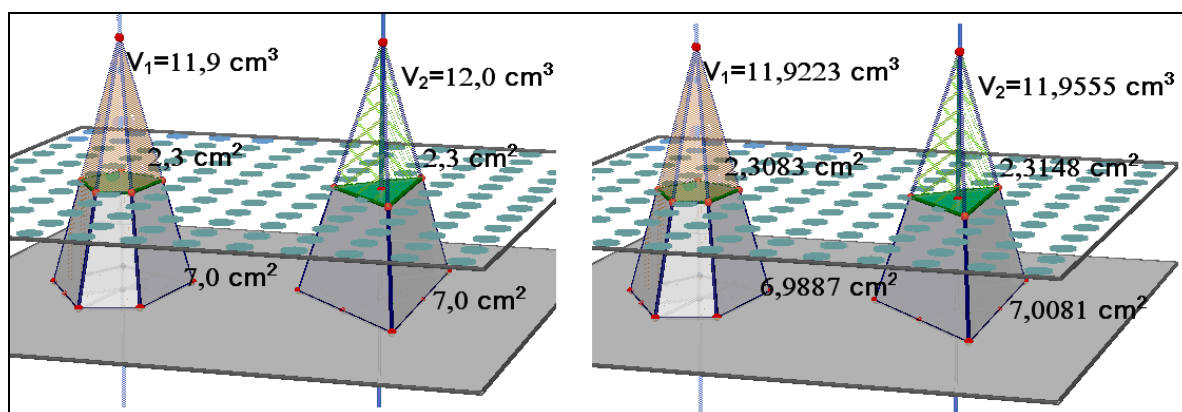
Dynamické 3D programy přispívají rovněž ke zvýšení **názornosti výuky, zájmu a posílení motivace žáků**. Často již samotné zařazení počítačového programu do vyučovací hodiny vede u žáků ke zlepšení pozornosti a zesílení zájmu o probíranou látku. To vše napomáhá **zvyšování efektivity vyučování**.

4 Úskalí využívání dynamických programů

Používání 3D programů má z hlediska výuky stereometrie také svá **úskalí**. Aktivací příkazů, které jsou v programu k dispozici, žák snadno sestrojí požadovaný výsledek – např. řez mnohostěnu rovinou, průsečík přímky a tělesa aj. Tyto nástroje by však žáci měli používat až v okamžiku, kdy si již osvojili principy řešení těchto základních úloh a využívat je v situacích, kdy řez či průsečík nejsou cílem, ale prostředkem k nalezení řešení náročnějšího úkolu [6]. V opačném případě pak příkaz představuje pro žáky černou skříňku, s jejíž pomocí získají výsledek bez hlubšího pochopení.

V prostředí *Cabri 3D* je konstrukce tělesa předem daných rozměrů pracná. Je proto vhodné program spíše využívat pro řešení úloh, které se zabývají těmi vlastnostmi a vztahy, jenž nejsou přímo závislé na konkrétních rozměrech tělesa. Pokud se učitel rozhodne využívat tento program ve výuce analytické geometrie, zjistí, že zde nelze přímo zkonstruovat útvar zadaný obecnou rovnicí či parametrickým vyjádřením. Sestrojit tak rovinu na základě její obecné rovnice znamená, že například určí souřadnice tří nekolineárních bodů z této roviny, body sestrojí a jimi proloží rovinu. Na základě několikaleté práce s *Cabri 3D* lze konstatovat, že jen málo příkladů ze středoškolských učebnic a sbírek z oblasti analytické geometrie dává po zobrazení v prostředí programu názorný a přehledný obrázek. Důležitým přínosem využívání programu v této partii je však propojení syntetického a analytického přístupu ke geometrickým objektům.

K dalším nástrahám v 3D prostředí patří také to, že funkčnost a výsledek některých, zejména metrických, příkazů ovlivní přístup uživatele. Pokud řešíme metrické úlohy na tělesech, můžeme se v prostředí *Cabri 3D* setkat s výsledky, které nekorespondují přesně s teoretickými. Například při demonstraci Cavalieriho principu žáci sestrojí pětiboký a trojboký jehlan, které mají stejné výšky a obsahy podstav. Poté sestrojí řez jehlanů rovinou, která je rovnoběžná s rovinou jejich podstav a změřením stanoví, že obsah řezu je u obou jehlanů stejný. Po aktivaci příkazu pro určení objemu jehlanů však zjistí, že jejich objemy nejsou totožné (obr. 6 vlevo). Tento problém souvisí s nastaveným zaokrouhlováním výsledků a také se způsobem konstrukce tělesa [5]. Pokud zvolí větší počet desetinných míst u výsledků zobrazených na pracovní ploše, zjistí, že obsahy podstav ani řezů nejsou stejné, ale liší se (obr. 6 vpravo).



Obr. 6 Vliv zaokrouhlení na výsledky metrických příkazů

Ze zkušeností, získaných v rámci výuky a také kurzů dalšího vzdělávání pro učitele matematiky z praxe, vyplývá, že je vhodné kombinovat tradiční výuku s výukou podporovanou těmito programy. Oba přístupy se vzájemně doplňují – v různých tématech jsou didakticky přínosné různé přístupy a každé téma nelze vyučovat se zařazením heuristických postupů a experimentování. Deduktivní postup je někdy efektivnější, neboť experimentování klade nároky na výukový čas i na přípravu učitele. Pokud žáci pracují s dynamickými programy individuálně, měl by učitel věnovat zvýšenou pozornost tomu, jakým způsobem si zaznamenávají žáci svá zjištění. Při práci v dynamickém prostředí žáci často zapomínají na poznámky, takže jen obtížně pro skončení hodiny rekonstruují svůj postup řešení a získané výsledky. Tuto situaci mohou částečně zlepšit pracovní materiály, které učitel připraví a do kterých žáci podle jeho pokynů zapisují v průběhu samostatné práce.

Dynamické atributy geometrických programů i jejich přínos pro výuku se zdůrazní a zvýší, pokud učitel používá tyto programy společně s dalšími prostředky ICT, a to konkrétně s interaktivní tabulí či Internetem.

5 Závěr

Kvalitní dynamické 3D programy přináší do výuky stereometrie řadu pozitivních aspektů a nových prvků. Jedna se zejména o změny ve vyučovacích metodách. Při využívání dynamického software dochází k odklonu od deduktivních postupů k syntetickým, které žáka staví do role experimentátora. Vyučovací strategie a postupy za podpory dynamické geometrie vycházejí z pozorování, experimentování a zobecňování. Žákům nejsou předkládány hotové poznatky, ale na základě virtuální manipulace s objekty v rýsu sami, či za podpory učitele a spolužáků, dospívají k novým vědomostem.

Zmíněné pozitivní jevy se však ve výuce neprojeví automaticky. Záleží na učiteli a jeho pedagogických schopnostech, jakým způsobem začlení tyto programy do kontextu dané vyučovací hodiny a jak tím ovlivní efektivitu vyučování. K tomu, aby programy dynamické geometrie napomáhaly zlepšovat úroveň žákovských vědomostí, je třeba také pozměnit způsob výuky a vnést do ní více problémových prvků.

Literatura

- [1] JOHNSTON-WILDER, S. – MASON, J. *Developing Thinking in Geometry*. London: Paul Chapman Publishing, 2006. 270 s. ISBN 1-4129-1169-9.
- [2] KUŘINA, F. *Umění vidět v matematice*. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989. 248 s. ISBN 80-04-23753-3.
- [3] LEISCHNER, P. *Rozvíjení prostorové představivosti žáků středních škol: dizertační práce*. Praha: MFF UK, 2003. 150 s.
- [4] POMYKALOVÁ, E. Geometrické vidění studentů SŠ v ČR. In *Sborník konference z geometrie a počítačové grafiky Zadov '99*. České Budějovice: JČU, 1999. s. 67-70. ISBN 80-7040-367-5.
- [5] ROBOVÁ, J. Cabri 3D ve výuce geometrie. *University of South Bohemia Department of Mathematics Report Series*. 2007, vol. 17, s. 97–101. ISSN 1214-4681.

- [6] ROBOVÁ, J. Software 3D ve výuce geometrie. In Hájková, E.; Vémolová, R. (ed.). *XXV. International Colloquium on the Acquisition Process Management* [CD ROM]. Brno: UO – Fakulta ekonomiky a managementu, 2007. ISBN 978-80-7231-228-3.
- [7] STACHOVÁ, D. – STACHO, M. Dôsledky reforiem základných a stredných škôl na výučbu geometrie na vysokých školách. In Hájková, E.; Vémolová, R. (ed.). *XXV. International Colloquium on the Acquisition Process Management* [CD ROM]. Brno: UO – Fakulta ekonomiky a managementu, 2007. ISBN 978-80-7231-228-3.
- [8] ZEMEK, V. Využití počítačů při objevování a dokazování poznatků o kuželosečkách. *University of South Bohemia Department of Mathematics Report Series*. 2005, vol. 13, s. 233–236. ISSN 1214-4681.
- [9] ŽILKOVÁ, K. *Školská matematika v prostředí IKT*. Bratislava: Vydavateľstvo UK, 2009. 136 s. ISBN 978-80-223-2555-4.
- [10] <http://www.pf.jcu.cz/cabri/cabri.htm>
- [11] <http://www.raumgeometrie.de/drupal/en>

Kontaktná adresa

RNDr. Jarmila Robová, CSc.
MFF UK
Sokolovská 83, 186 75 Praha 8
Jarmila.Robova@mff.cuni.cz