

Modelovanie vybraných viet a poznatkov školskej matematiky v prostredí IKT

Modelling of Selected Math Theorems And Knowledges In ICT Environments



Dušan Vallo, Júlia Záhorská

Abstract

In this article we present some topics and ideas on how to use the ICT in math education. We are concerned with the bases of projection of solids, graphic approach to percent calculation and its application in chemistry, modeling of the volume of the pyramid, geometric meaning of the algebraic expression and quadratic function. We follow a simple goal – not to solve the examples precisely but show the implementations of the ICT by using Cabri 3D and Geogebra software. This means that we solve some problems by the use of geometry.

Keywords

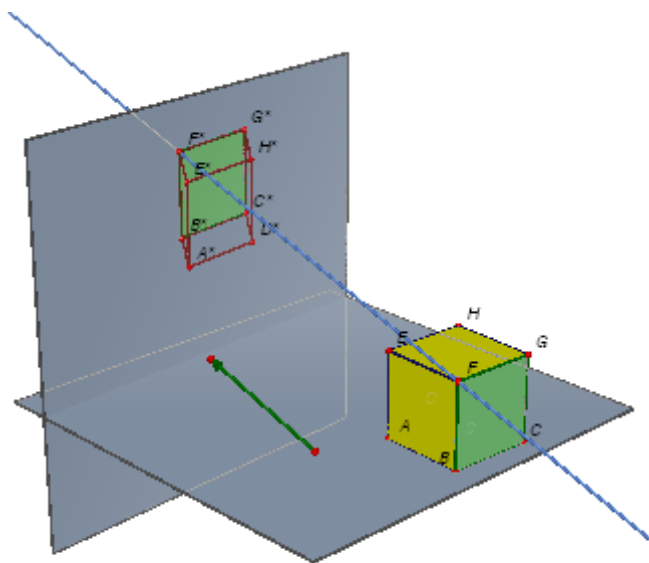
Cabri 3D, GeoGebra, percent, quadratic function, pyramid, projection

1 Úvod

V súčasnosti má vyučujúci k dispozícii viaceré programy podporujúce výučbu matematiky. K pomerne najznámejším patria Cabri geometria II, Cabri 3D, Derive 6, Excel a v poslednom čase veľmi progresívny program GeoGebra. Študijné materiály, ich príprava a implementácia do výučby je často postavená na ochote a schopnosti učiteľa, materiálo-technického zabezpečenia školy a dostatku inšpiratívnych zdrojov. V tomto skromnom príspevku sa zameriame na práve také inšpiratívne myšlienky, ktoré by mohli poslúžiť učiteľom vo výučbe ako motivácia. Rovnako nie je našim cieľom exaktné vyloženie teórie ani úplné rozriešenie demonštratívnych príkladov. Z toho dôvodu môžeme inšpirovať čitateľa tým, že sme si zvolili rýdzo geometrický prístup, miestami mierne prekračujúci elementárne použitie geometrických programov Cabri 3D a GeoGebry.

2 Voľné rovnobežné premietanie

Voľné rovnobežné premietanie patrí k základným zobrazeniam znázorňujúcim telesá, ktoré sa používajú vo vyučovaní matematiky. Na nasledujúcom obrázku je znázornená kocka a jej priemet v smere daného vektora do zvolenej roviny - priemetne. Ide o ilustráciu podstaty voľného rovnobežného premietania.



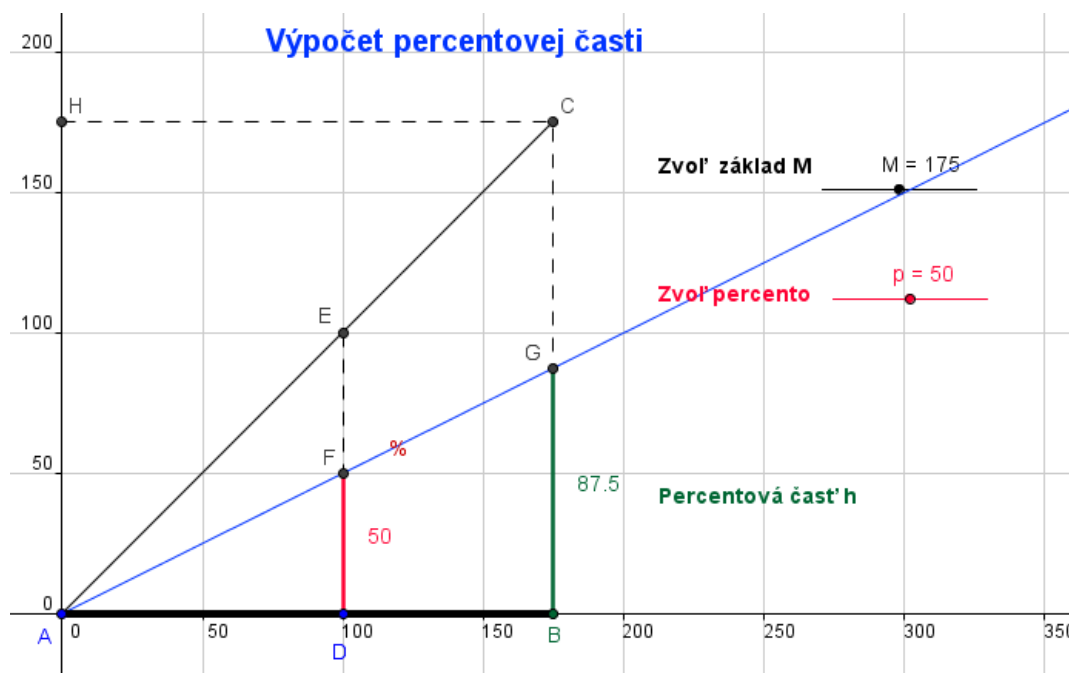
Obr. 1 Vo wordovskom dokumente kliknite pravým tlačidlom myši na obrázok a vyberte možnosť Objekt Cabri3DActive Doc – Manipulate. Pravým tlačidlom myši za stáleho držania tlačidla možno obrázkom otáčať, inak zobrazované body premiestnite ako v Cabri 3D. (Musíte mať nainštalovaný ovládací prvok [Cabri3D Plugin Win](#)). Aplet možno použiť aj vo verzii [obraz kocky vo VRP.cg3](#)

3 Percentá

Percentuálny počet je jedným z dôležitých učív školskej matematiky, ktoré nachádzajú svoje uplatnenie v praxi. Spôsob výučby na základnej škole je postavený na numerických výpočtoch,

preto ukážeme grafický spôsob výpočtu percent, percentovej časti a základu.

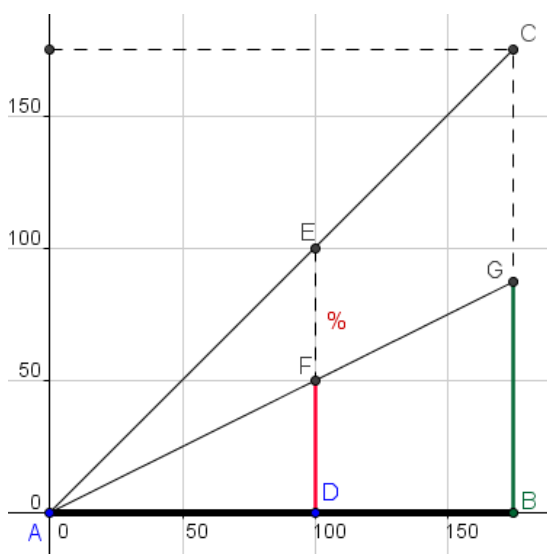
Na nasledujúcom obrázku je znázornený výpočet percentovej časti grafickým spôsobom.



Obr. 2 [Aplet](#)

Zdôvodnenie správnosti konštrukcie je jednoduché. Vychádzame z rovnoramenného a pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole B . Z podobnosti trojuholníkov ADF, ABG vyplýva $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DF|}{|BG|}$. Z podobnosti trojuholníkov ADE, ABC dostaneme $\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DE|}{|BC|}$.

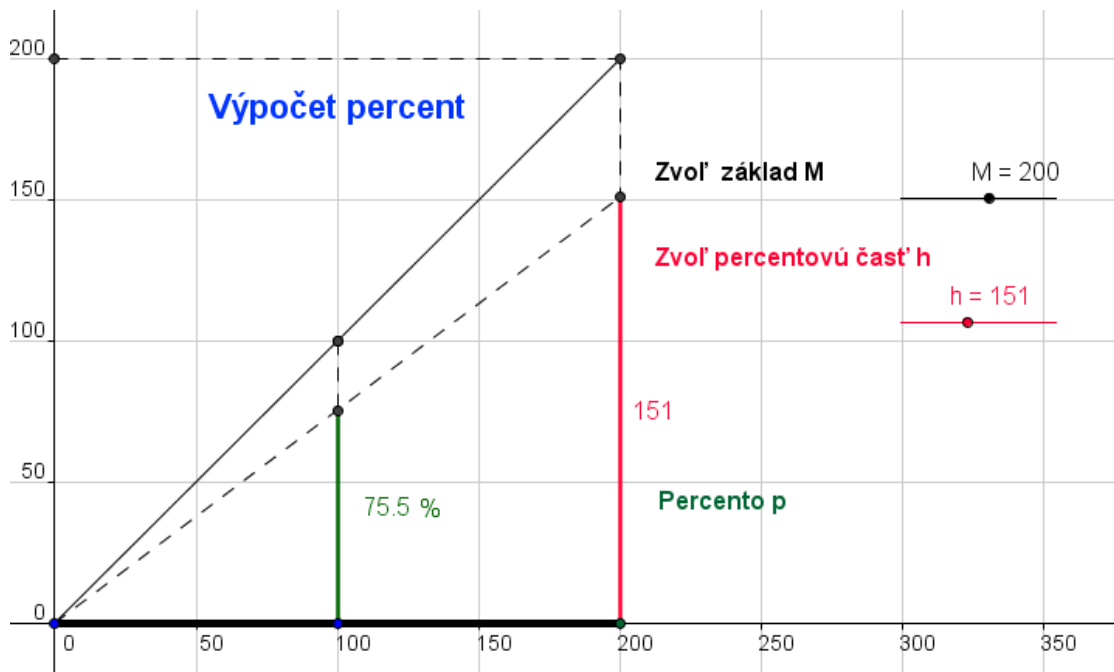
Z uvedených rovností vyplýva $\frac{|DF|}{|DE|} = \frac{|BG|}{|BC|}$. Nakoľko je úsečka DE jednotková s dĺžkou 100, DF reprezentuje počet percent p .



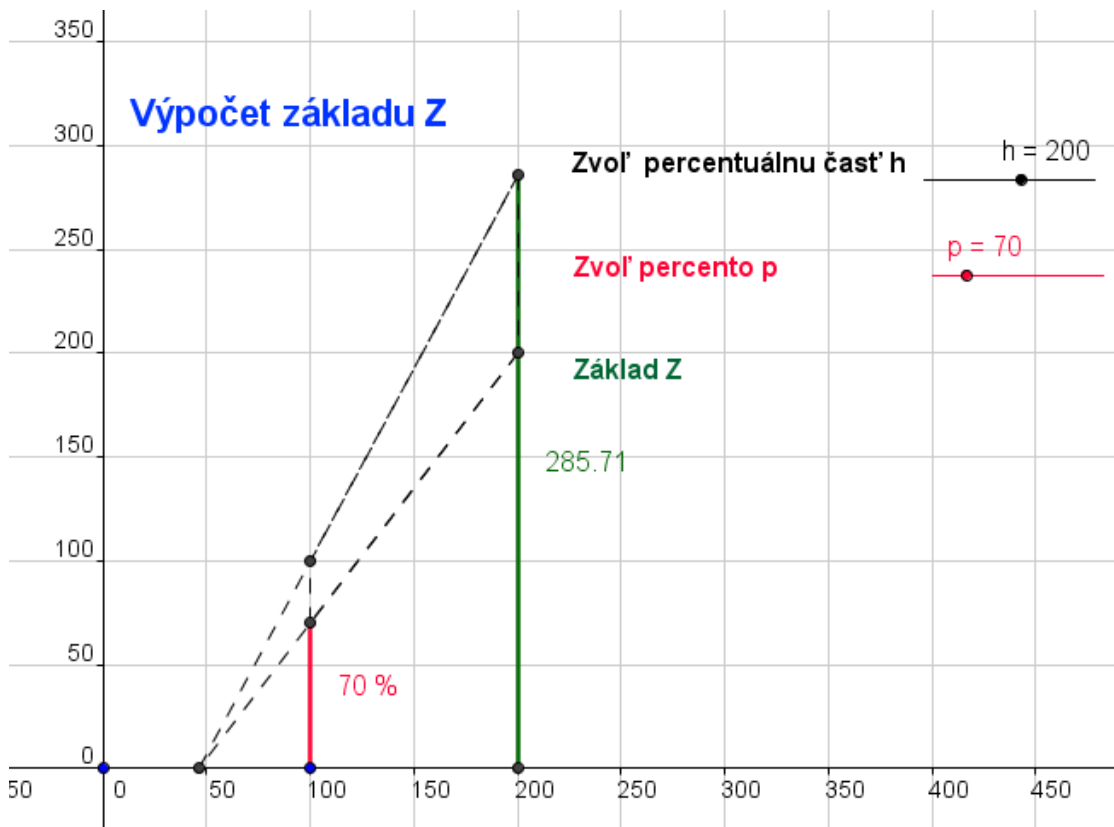
Obr. 3

Aplet funguje tak, že voľbou základu M (z intervalu $\langle 0, 350 \rangle$) sa mení dĺžka AB , voľbou p počtu percent sa zvolí žiadaná hodnota a vypočíta sa percentuálna časť h .

Obdobným spôsobom môžeme vytvoriť aplety na výpočet percent a základu. Uvádzame len ukážky (obr. 3 a obr. 4), zdôvodnenie správnosti apletu necháme na čitateľa.



Obr. 4 [Aplet](#)



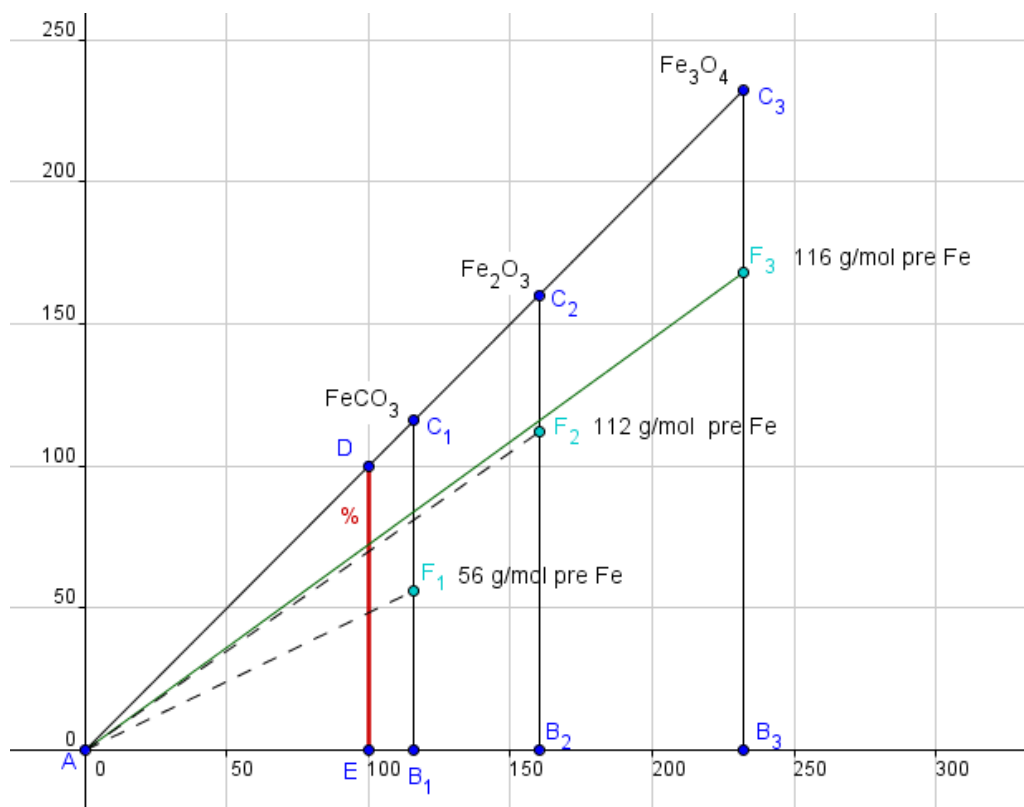
Obr. 5 [Aplet](#)

„Čítanie z grafu“ niekedy napomáha pri hľadaní odpovedi na danú úlohu. V nasledujúcom príklade ukážeme pomerne neštandardné riešenie jednej úlohy z chémie. Prepojenie s predchádzajúcimi poznatkami o grafickom riešení percentového počtu a „čítaní z grafu“ spočíva v tom, že do jedného obrázku umiestnime naraz tri grafy.

3.1 Príklad

Nákupca železných rúd sa mal rozhodnúť medzi nákupom hematitu Fe_2O_3 , magnetitu Fe_3O_4 a sideritu $FeCO_3$. Rozhodol sa pre takú rudu, ktorá obsahovala najväčšiu percentuálnu časť železa Fe . Ktorú rudu nakúpil?

Riešenie. Pomocou Mendelejevovej periodickej tabuľky prvkov vypočítame mólové hmotnosti zlúčenín v hodnotách $M FeCO_3 = 116 g/mol$, $M Fe_2O_3 = 160 g/mol$ a $M Fe_3O_4 = 232 g/mol$, kde množstvo železa Fe je postupne $m_1 = 56 g/mol$, $m_2 = 112 g/mol$ a $m_3 = 168 g/mol$.



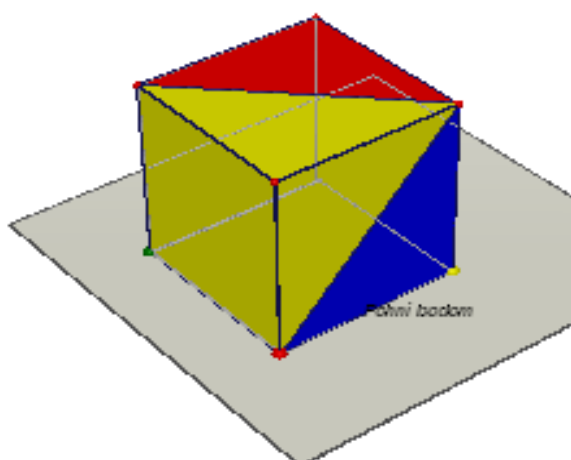
Obr. 6

Zostrojíme si rovnoramenné a pravouhlé trojuholníky AB_iC_i , $i=1,2,3$ s pravými uhlami pri vrcholoch $B_i, i=1,2,3$, kde $|AB_1|=116j$, $|AB_2|=160j$ a $|AB_3|=232j$. Priemka ED , kolmá na $AB_i, i=1,2,3$ má dĺžku $|AE|=100j$ a predstavuje percentuálnu os. Na úsečkách B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 zostrojíme postupne body F_1, F_2, F_3 tak, aby platilo $|B_1F_1|=56j$, $|B_2F_2|=112j$ a $|B_3F_3|=168j$.

Priemery úsečiek $AF_i, i = 1, 2, 3$ s priechkou ED určujú percentuálne zastúpenie železa v jednotlivých rudách. Z obrázku je hneď jasné, že percentuálne najviac železa Fe obsahuje zlúčenina magnetitu Fe_3O_4 a teda táto ruda bola aj nakúpená.

4 Ihlan

Objem kocky je východiskovým prvkom pri určovaní objemu ihlanov. Ku klasickej školskej ukážke sa počíta „rozobratie kocky“ na tri ihlany so štvorcovou podstavou. Na obrázku je táto situácia vymodelovaná v programe Cabri 3D.

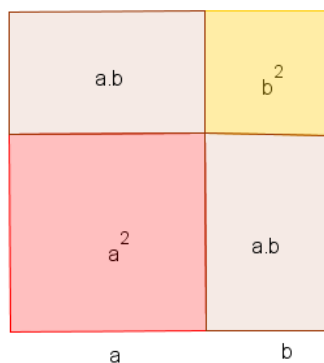


Obr. 7 Vo wordovskom dokumente kliknite pravým tlačidlom myši na obrázok a vyberte možnosť Objekt Cabri3DActive Doc – Manipulate. Pravým tlačidlom myši za stáleho držania tlačidla možno obrázkom otáčať, inak zobrazované body premiestnite ako v Cabri 3D. (Musíte mať nainštalovaný ovládací prvok [Cabri3D Plugin Win](#)). Aplet možno prehliadať aj vo verzii [Objem ihlanu tretinovy.html](#)

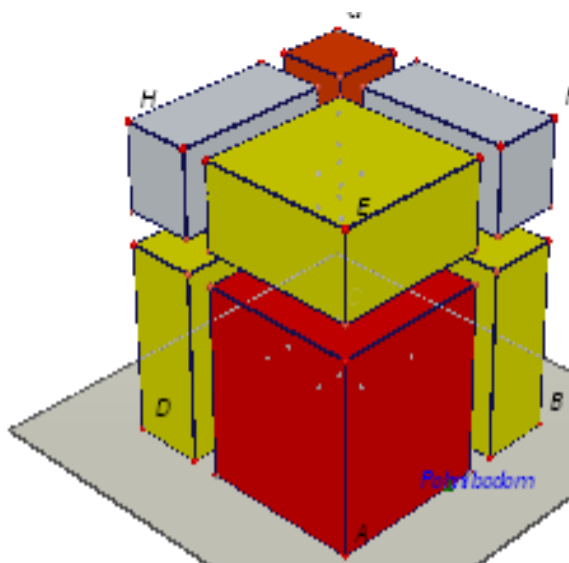
5 Algebraický výraz $a + b^3$

V učebniciach matematiky sa žiaci stretnú s geometrickou interpretáciou algebrickej rovnosti $a + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$ v podobe obsahu štvorca so stranou $a + b$, ktorý je znázornený na obr. 8.

Geometrická interpretácia algebrickej rovnosti si vyžaduje prejsť do trojrozmerného euklidovského priestoru. Ukážeme, že členy algebraického výrazu $a + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ môžeme pre $a > 0, b > 0$ interpretovať ako objemy – najprv kocky s hranou $a + b$, ktorá je rozložená na dve menšie kocky postupne s hranami a, b a dve rôzne trojprvkové množiny vzájomne zhodných hranolov.



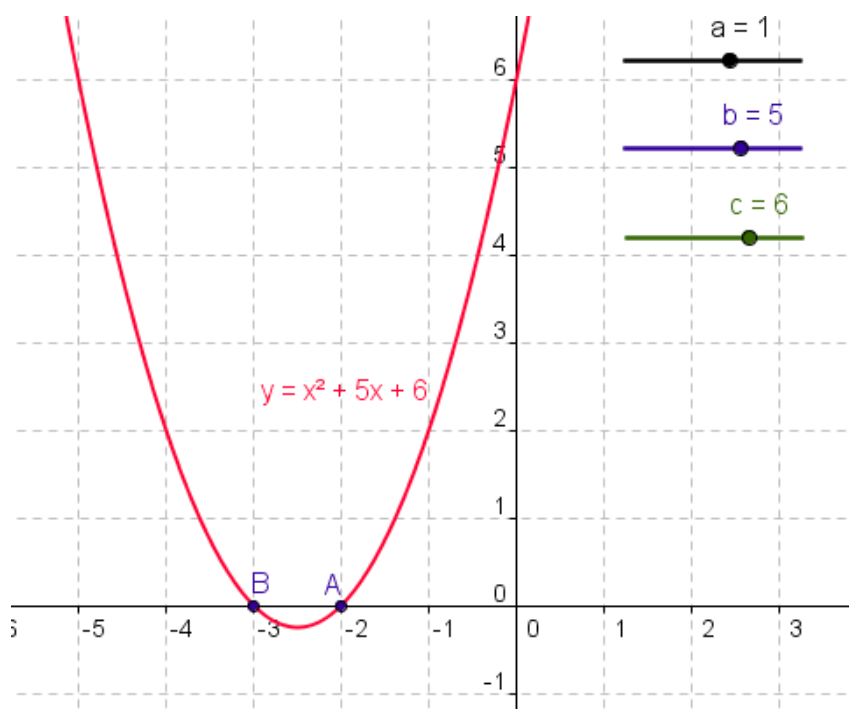
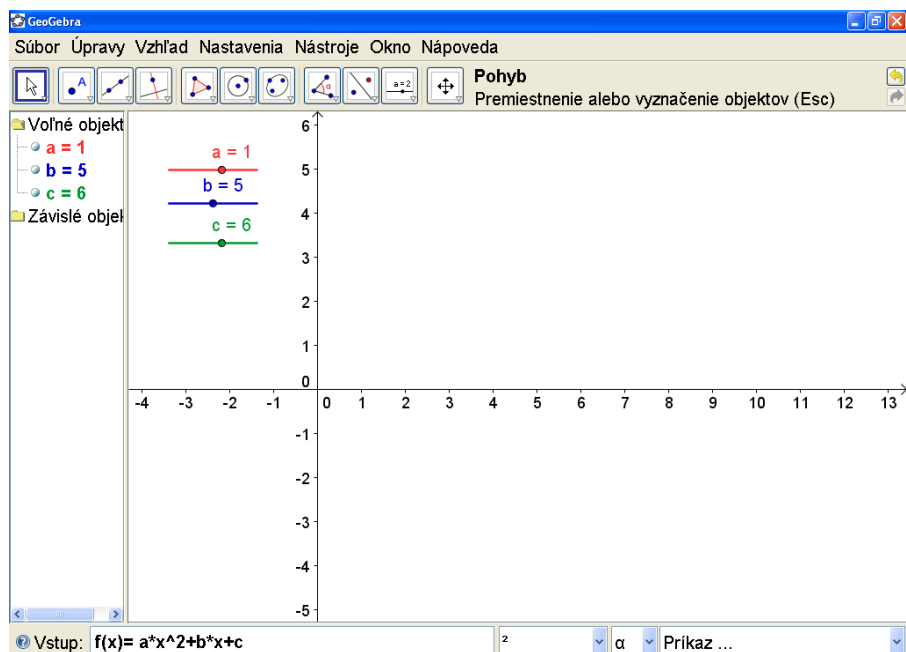
Obr. 8



Obr. 9 Vo wordovskom dokumente kliknite pravým tlačidlom myši na obrázok a vyberte možnosť Objekt Cabri3DActive Doc – Manipulate. Pravým tlačidlom myši za stáleho držania tlačidla možno obrázkom otáčať, inak zobrazované body premiestnite ako v Cabri 3D. (Musíte mať nainštalovaný ovládací prvok [Cabri3D Plugin Win](#)).

6 Kvadratická funkcia

Kvadratická funkcia a výpočet koreňov kvadratickej rovnice je jedno z klasických učív stredoškolskej matematiky. Hodnota reálnych koeficientov a, b, c v predpise funkcie $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ sa priamo premieta do grafu tejto funkcie – paraboly. Študenti sa učia načrtávať graf. Nasledujúci aplet ponúka možnosť experimentovania s grafom, ak koeficienty a, b, c nadobúdajú vybrané hodnoty. Priebeh funkcie v špeciálnych prípadoch, ak $a > 0$, resp. $a < 0$, prípadne $b = 0$ alebo $c = 0$, je priamo demonštrovaný apletom. Aplet je možné v programe GeoGebra vytvoriť jednoducho. Umiestnime na plochu tri posuvníky a, b, c (ich parametre nastavíme dodatočne) a do príkazového riadku napíšeme „ $f(x)=a*x^2+b*x+c$ “. Po potvrdení (Enter) sa zostrojí odpovedajúci graf funkcie.



Obr. 10 [Aplet](#)

Praktické využitie kvadratickej rovnice a funkcie si ukážeme na príklade, pričom prezentujeme len grafické riešenie. Konkrétny výpočet koreňov prenecháme na čitateľa.

6.1 Príklad

Dvaja robotníci mali pracovať rovnaký počet hodín, avšak každý za inú hodinovú mzdu. Robotník X však nepracoval a hodín, robotník Y zase b hodín. X dostal A eur, Y dostal B eur. Ak by X vymeškal b hodín a X a hodín, dostali by rovnaký plat. Ako dlho a za akú hodinovú mzdu

pracovali? Naznačte riešenia pre $a, b \in \{0, 1, 2, \dots, 10\}$, $A, B \in \langle 0, 50 \rangle$ a riešte aj konkrétne pre $a = 5$ hod., $b = 8$ hod., $A = 37,5$ eura, $B = 24$ eur.

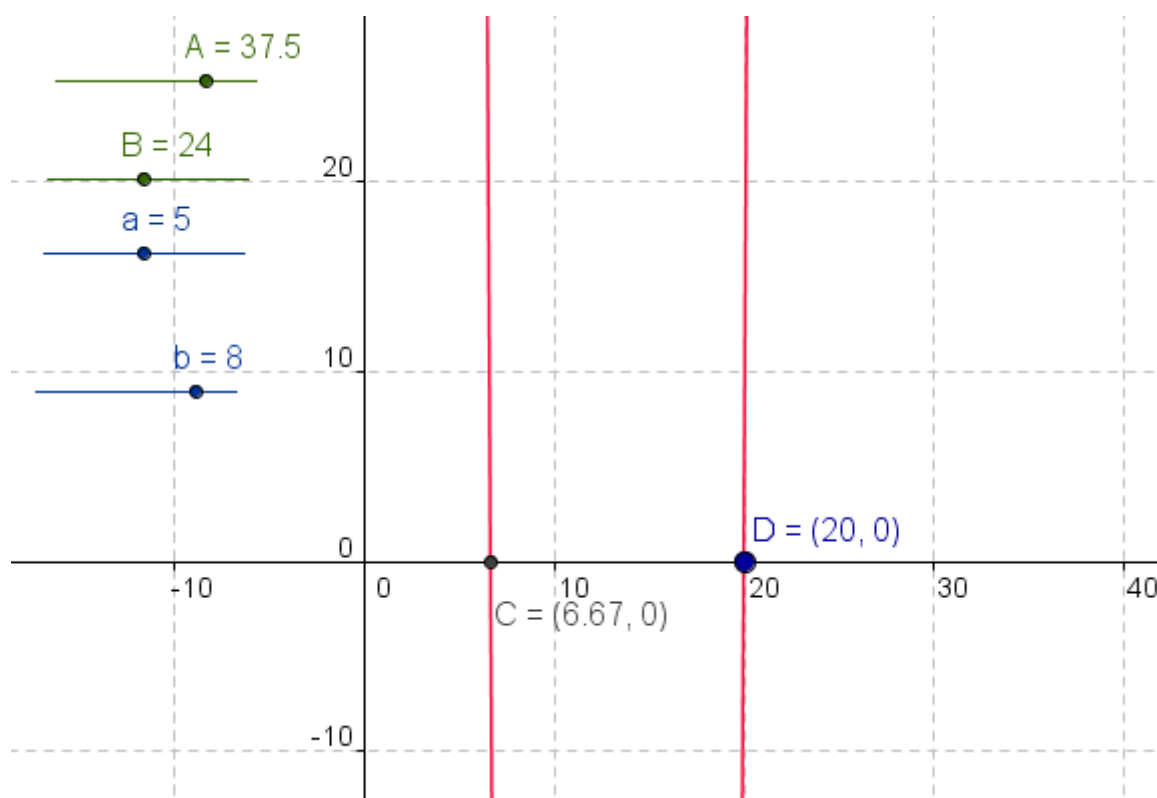
Riešenie. Označme predpokladaný spoločný čas práce ako x . Robotník X odpracoval $x - a$ hodín za plat A a jeho hodinová mzda predstavuje zlomok $\frac{A}{x - a}$. Obdobne je na tom robotník Y, ktorý na $x - b$ odpracovaných hodín dostal plat B , a teda jeho hodinová mzda bola $\frac{B}{x - b}$. Ak zohľadníme predpoklad, že by odpracovali počty hodín podľa zadania a dostali rovnakú mzdu, dostaneme rovnicu

$$x - b \frac{A}{x - a} = x - a \frac{B}{x - b}.$$

Po úprave

$$x^2 \cdot A - B + x \cdot 2aB - 2Ab + Ab^2 - a^2B = 0.$$

Odvodili sme kvadratickú rovnicu s parametrami A, B, a, b a jej exaktné riešenie by sme získali štandardným spôsobom – výpočtom diskriminantu D a úvahou o parametrických riešeniach. Tento postup necháme na čitateľa. My sme zostrojili aplet, v ktorom naznačíme riešenia podľa zadania - úloha je riešená pri konkrétnej voľbe parametrov A, B, a, b graficky.



Obr. 11 [Aplet](#)

Pri voľbe $a = 5$ hod., $b = 8$ hod., $A = 37,5$ eura, $B = 24$ eur je konkrétna rovnica $3x^2 - 80x + 400 = 0$, ktorej korene sú $x_1 = 20$ hod. a $x_2 = 6\frac{2}{3}$ hod. Druhý koreň $x_2 = 6\frac{2}{3}$ však nevyhovuje riešeniu úlohy,

keďže robotník Y zameškal 8 hod. práce. Hodinová mzda robotníka X bola 2,5 eura a Y zase dostal 2 eura za hodinu práce.

Poznámka. Vidíme, že grafické riešenie je pohodlnejšie, ak zadanie požaduje výber parametrov úlohy z istých intervalov. Zmenou vstupnej hodnoty na patričnom posuvníku sa graf automaticky prekreslí.

7 Záver

V príspevku sme na konkrétnych príkladoch prezentovali použitie grafického riešenia úloh, ktoré svojím obsahom zapadajú do stredoškolskej matematiky. Jednotlivé obrázky sme doplnili interaktívnymi apletmi, vytvorenými v programoch Cabri 3D a GeoGebra. Veríme, že tento príspevok bude dobrým motivačným povzbudením pre učiteľov z praxe.

Literatúra

- [1] Csiba, P.: *Voľne sriteľné geometrické softvéry*. Zborník konferencie: 5. medzinárodná konferencia Aplimat, STU, 2006, s. 47-54. ISBN 80-967305-5-X
- [2] Csiba, P.: *Nové aspekty a možnosti vo vyučovaní matematiky*, In: Zborník príspevkov 1. vedeckej konferencie s medzinárodnou účasťou, Trenčín, s. 58-63. ISBN 978-80-8075-347-4.
- [3] Drábeková, J. – Rumanová, L.: *Využitie didaktických softvérov v niektorých častiach matematiky*. Nitra. In: Medzinárodné vedecké dni 2008 - zborník recenzovaných príspevkov z medzinárodnej vedeckej konferencie. SPU Nitra 2008, s. 1231-1235. ISBN 978-80-552-0061-3
- [4] Pavlovičová, G. - Rumanová, L.: *Rozvoj priestorovej predstavivosti s využitím Cabri 3D*. Bratislava: In: E-matik 2007 : *E-learning v matematike, matematika v E-learningu*, Bratislava - Slovakia, September 10-12, 2007. - Bratislava: UK, 2007. - nestr.
- [5] Vidermanová, K.: *Výučba stereometrie a rozvoj priestorovej predstavivosti pomocou počítačových programov*. In: Informačné a komunikačné prostriedky vo vzdelávaní v matematike. Nitra: FPV UKF, Prírodovedec č. 199, 2005. ISBN 80-8050-925-5- S.
- [6] Žilková, K.: *Školská matematika v prostredí IKT*. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 2008. ISBN 978-80-223-2555-4
- [7] Žilková, K.: *Nástrahy Cabri geometrie II*. In: Acta 2004 – Zborník Pedagogickej fakulty Trnavskej univerzity. Trnava: PF TU, 2004, ISBN 80-8082-014-7.

Kontaktná adresa

RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied UKF v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
dvallo@ukf.sk

PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied UKF v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
jzahorska@ukf.sk