

Modernizačné prvky v učive o uhloch

Elements of Modernization in Teaching of Angles



Katarína Žilková

Abstract

The article discusses opportunities for modernization of a selected topic of school mathematics. A traditional approach is adapted and supplemented by interactive and animative elements. The role of electronic materials in mathematics teaching rests primarily on facilitation of the visualization of processes with concentration on their mathematical and geometrical substance (transferring and comparing angles, their graphical sum, etc.), visualization of relationships (triangle interior angles theorem), introduction of dynamic elements to teaching and opportunities for an interactive experiment. The electronic materials are presented in various forms and besides external resources, we will present authorial animations and electronic assignments distributed on www.webmatika.sk.

Keywords

angles, animation, dynamics, ICT, interactivity, mathematics, teaching, visualization

1 Úvod

Využívanie prostriedkov informačných a komunikačných technológií vo vyučovaní školskej matematiky je determinované rôznymi činiteľmi. Odhliadnuc od technického vybavenia škôl, informatickej gramotnosti učiteľov matematiky je dôležité akcentovať dostupnosť rôzneho druhu, ale najmä rôznej kvality výučbových matematických materiálov.

Zrejme najjednoduchším spôsobom využitia potenciálu prostredia IKT je aplikovať do vyučovania vybraných obsahových partií matematiky dostupné *hotové materiály*, či už vo forme rôznych *appletov*, *animácií*, *zadaní*, prípadne cielených elektronických *vzdelávacích hier*. Učiteľ matematiky by mal mať prehľad o kvalitných elektronických materiáloch a bezpochyby by mal disponovať aj zručnosťou ako s nimi manipulovať. K snád' najdôležitejšej požiadavke kladenej na učiteľa v tejto oblasti patrí kompetentný výber najvhodnejšieho materiálu pre danú vybranú tematickú oblasť. V záplave výstupov zverejnených na Internete (prípadne na iných pamäťových zariadeniach) je veľmi náročné nielen z časového hľadiska, ale aj odborného pohľadu klasifikovať materiály kvalitné a „menej kvalitné“. Taktiež je veľmi dôležité uvedomenie si skutočnosti, na splnenie akého cieľa je produkt určený. Niekedy v snahe moderného využitia dostupnej aplikácie nepríde k naplneniu očakávaného didaktického úspechu. V zásade hesla „Kto nič nerobí, nič nepokazí!“ sa netreba zľaknúť prípadného neúspechu vo vyučovaní a nenechať sa odradiť od využívania IKT prostriedkov a s ním súvisiacich výučbových materiálov. Je dobré v tomto prípade diagnostikovať problémy, ktoré nastali a identifikovať ich príčiny. Vo všeobecnosti, zo skúseností viacerých odborníkov z oblasti modernizácie vyučovania matematiky, možno konštatovať, že vyučovanie podporené prostriedkami IKT je pre vzdelávaciú klientelu nielen motivujúce a pútavé, ale najmä z didaktického hľadiska veľmi užitočné.

Z vyššie uvedených dôvodov je cieľom príspevku vytvoriť tematicky ucelený vzdelávací materiál (určený nielen pre žiakov, učiteľov, ale aj budúcich učiteľov matematiky) na širšie koncipovanú tému o uhloch, ilustrovať možnosti využitia animácií, interaktívnych úloh a matematických interaktívnych hier.

2 Uhol, jeho veľkosť, operácie s uhlami

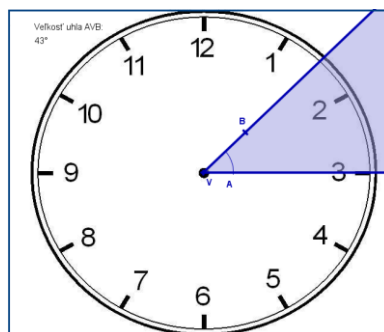
2.1 Určujúce prvky uhla

Spôsobov ako definovať uhol je viac a výber metódy vždy závisí od cieľovej vzdelávacej skupiny. Úvahu možno začať s tromi bodmi A , V , B , ktoré neležia na jednej priamke a definovať „*konvexný uhol AVB ako množinu všetkých bodov X všetkých polpriamok VY , kde bod Y je bodom úsečky AB* “ (Šedivý, Križalkovič, 1990, s. 149). Ďalšia možnosť je uvažovať nad dvomi rôznymi polpriamkami VA , VB so spoločným začiatočným bodom V , pričom tieto polpriamky rozdelia rovinu na dve časti, z ktorých každá spoločne s polpriamkami VA a VB tvoria uhol. Bližšiu konkretizáciu uhla AVB potom realizujeme určením niektorého vnútorného bodu.

V oboch prístupoch sú teda podstatné určujúce prvky uhla AVB :

- bod V nazývame *vrchol uhla*,
- polpriamky VA , VB nazývame *ramená uhla*.

Zavedieme symbol pre označovanie uhlov $\angle AVB$. Pomocou interaktívnej pomôcky (obr. 1) zverejnenej na www.webmatika.sk (v sekcii uhol, jeho veľkosť, operácie s uhlami) možno realizovať činnosti na spoznávanie a vytvorenie korektnej predstavy o uhle, jeho určujúcich prvkoch, aktivity o identifikovaní bodov, ktoré danému uhlu patria, resp. nepatria, ďalej o konvexnom a nekonvexnom uhle, špeciálnych uhloch (priamy uhol, pravý uhol).

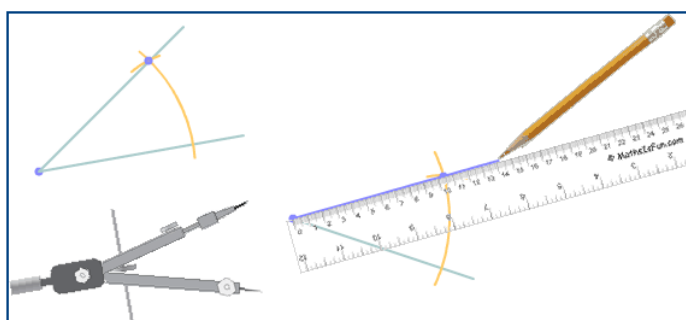


Obr. 1 Interaktívna pomôcka určená na vytváranie predstavy o uhloch
<http://www.webmatika.sk/zadania/uhol/uhol.html>

2.2 Prenášanie uhla a porovnávanie dvoch uhlov

Jednou z významných činností potrebných k porovnávaniu dvoch uhlov je prenášanie daného uhla na danú polpriamku. Podstata konštrukčného algoritmu prenášania uhla (obr. 2) spočíva vo využití vlastností dvoch zhodných trojuholníkov (aplikácia vety SSS), pričom z úsporného dôvodu sa využíva voľba rovnoramenného trojuholníka. Dôležitosť znalosti konštrukčného prenášania uhlov sa vynára najmä

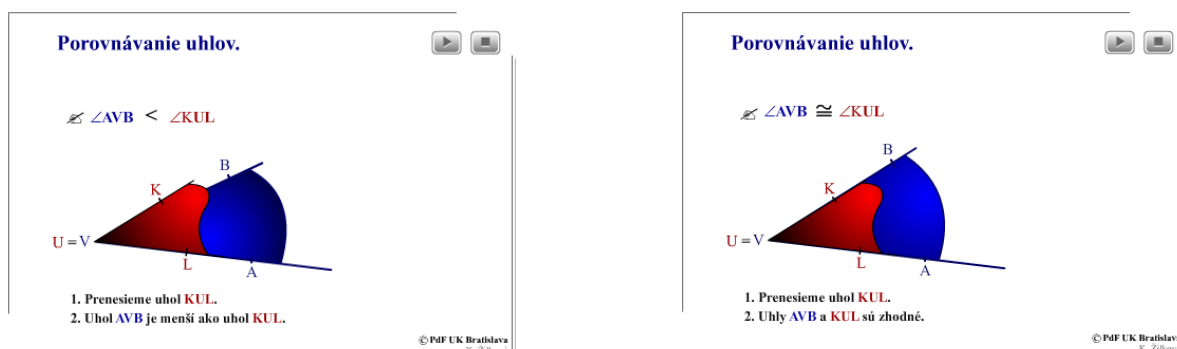
- pri geometrickej interpretácii manipulačných aktivít založených na princípe premiestňovania uhlov v rovine s cieľom overovania zhodnosti uhlov;
- pri grafickom porovnávaní uhlov, t.j. pri skúmaní relácií (menší, väčší, rovný);
- pri grafickom sčítaní a odčítaní uhlov.



Obr. 2 Konštrukčný algoritmus prenášania uhla <http://www.mathsisfun.com/geometry/construct-anglesame.html>

Vizualizáciu princípu realizácie porovnávania dvoch uhlov poskytujú animované elektronické pomôcky (obr. 3a, obr. 3b). Ich cieľom je poukázať na množinu výsledkov vzájomného porovnávania dvoch uhlov ($\angle AVB > \angle KUL$, $\angle AVB < \angle KUL$, $\angle AVB \cong \angle KUL$) a súčasne ilustrovať podstatu porovnávania daných uhlov. Na časté nedostatky, ktoré sa objavujú v súvislosti

s porovnávaním uhlov upozorňujú autori Didaktiky matematiky pre štúdium učiteľstva I. stupňa ZŠ, a zároveň zdôrazňujú, že „nezáleží na tom, ktorý uhol prenášame“ (O. Šedivý, K. Križalkovič, str. 173, 174).



Obr. 3 a) b) Porovnávanie dvoch daných uhlov

http://www.webmatika.sk/animacie/II.stupen/porovnavanie_uhlov_mensi.html

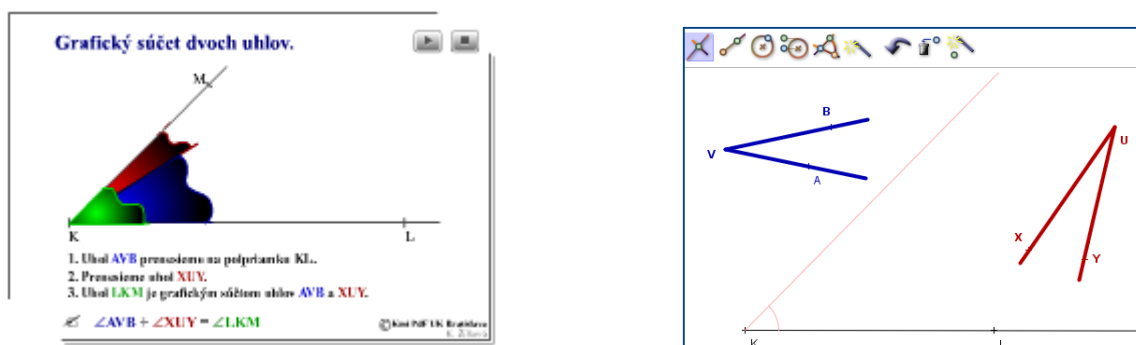
http://www.webmatika.sk/animacie/II.stupen/porovnavanie_uhlov_vacsi.html

http://www.webmatika.sk/animacie/II.stupen/porovnavanie_uhlov_zhodne.html

2.3 Grafický súčet dvoch uhlov

Na princípe znalosti prenášania uhlov na danú polpriamku je založená realizácia grafického súčtu dvoch uhlov. Podstatu grafického súčtu dvoch daných uhlov ilustruje animácia (obr. 4a), ktorá diskkrétne odhaľuje aj konštrukčný princíp. Žiak však nedostáva hotový konštrukčný návod (algoritmus), ako grafický súčet skonštruovať.

Z hľadiska teoretickej konštrukčnej podstaty je dôležité, aby žiaci disponovali znalosťou konštrukcie styčných uhlov v rovine, teda uhlov so spoločným vrcholom a spoločným jedným ramenom. Operácia grafického sčítovania uhlov je komutatívna a tiež asociatívna a zdôvodnenie uvedených vlastností vychádza zo základu zjednotenia množín bodov, ktorými je uhol definovaný.



Obr. 4 a) Animácia demonštrujúca princíp grafického súčtu dvoch uhlov

<http://www.webmatika.sk/animacie/II.stupen/sucet1.html>

b) Elektronické zadanie určené na vyriešenie

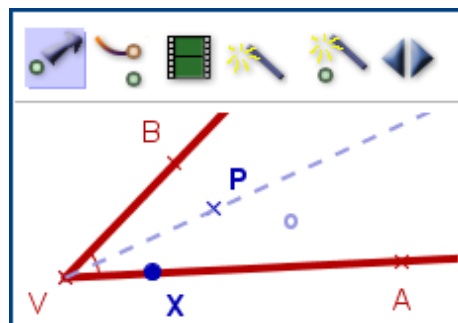
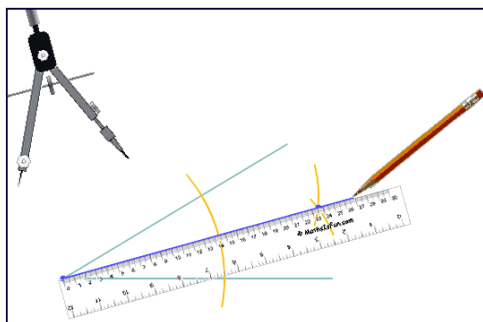
http://www.webmatika.sk/zadania/sucet_uhlov/sucet_uhlov.html

Pripravená animácia je užitočná pre mladších žiakov, ale aj pre súčasných a budúcich učiteľov matematiky. Na overenie konštrukčného algoritmu, ktorý je dôsledkom pochopenia uvedeného

princípu možno použiť matematické elektronické zadanie vytvorené v dynamickej geometrii Compass and Ruler ([obr. 4b](#)). Úlohou riešiteľa je vypracovať konštrukciu vo virtuálnom prostredí dynamickej geometrie pomocou konštrukčných nástrojov zobrazených v záhlaví zadania. Ak bude konštrukcia správna, t. j. uhol, ktorý je súčtom dvoch daných uhlov bude v závere označený, bude o tom užívateľ informovaný krátkym oznamom o korektnosti riešenia. Úloha o grafickom súčte dvoch daných uhlov koncipovaná v tvare elektronického zadania je určená pre starších žiakov.

2.4 Os uhla

Definovanie osi uhla a zvládnutie konštrukčného postupu na jej zostrojenie má strategický význam najmä z dôvodu vytvárania predstavy o pravom uhle, a teda relácii kolmost'. Na najnižšom stupni matematického vzdelávania postačuje definovať os uhla ako polpriamku so začiatkom vo vrchole V , ktorá rozdelí daný uhol na dve zhodné časti (dva zhodné uhly). Konštrukčný postup ilustruje animovaná ukážka, ktorej znázornenie je na [obr. 5a](#). Konštrukcia osi priameho uhla (uhol, ktorého ramená sú opačné polpriamky) je zároveň konštrukciou dvoch význačných zhodných uhlov – uhlov pravých. Na vyššom stupni vzdelávania možno definovať os uhla ako množinu bodov s charakteristickou vlastnosťou. Pre tieto potreby je vhodnejšou pomôckou interaktívna animácia postupu konštrukcie osi uhla ([obr. 5b](#)), v ktorej je možné sledovať zmeny polohy bodu P ako reprezentanta všetkých bodov daného uhla s vlastnosťou, že ich vzdialenosti od ramien uhla sa rovnajú. Okrem vopred pripravených hotových konštrukcií vo forme animácií, je možné použiť elektronické [zadanie](#), v ktorom má študent konštrukciu osi konvexného uhla pomocou konštrukčných nástrojov uvedených v záhlaví úlohy sám realizovať.



Obr. 5 a) Konštrukčný postup na zostrojenie osi uhla

<http://www.mathsisfun.com/geometry/construct-anglebisect.html>

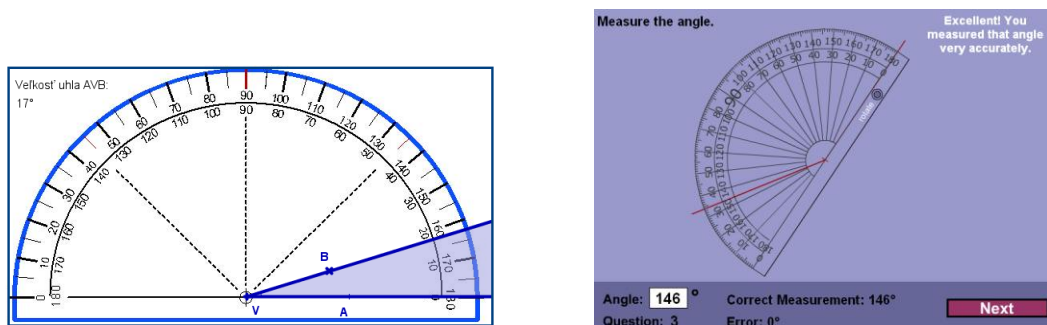
b) Interaktívna animácia postupu konštrukcie osi uhla s možnosťou vyznačenia stopy bodu P ležiaceho na osi uhla (http://www.webmatika.sk/zadania/uhol/os_uhla.html)

2.5 Veľkosť uhla

Určovanie veľkosti daného uhla sa najjednoduchšie realizuje meraním pomocou uhlomera. Budovanie predstavy o veľkosti uhla prebieha postupne a vo všeobecnosti platí, že čím viac praktických meraní žiak absolvuje, tým je lepší aj približný odhad veľkosti uhla. Zmysluplné používanie tradičnej pomôcky (uhlomera) si vyžaduje dôkladnú znalosť princípu merania uhlov, čo pre učiteľa matematiky znamená zvládnutie didaktiky vyučovania uvedenej oblasti.

Kým na začiatku procesu vyučovania zisťovania veľkosti uhlov používajú žiaci tradične dostupný uhlomer, učiteľ môže použiť jeho virtuálny model ([obr. 6a](#)) zobrazený na interaktívnej tabuli. Z didaktického hľadiska je vhodné začať merať uhly a zisťovať ich veľkosti v tzv. štandardnej

polohe. Zavádzajú sa pojmy jednotkový uhol, stupeň, nulový uhol, veľkosť pravého uhla, veľkosť priameho uhla. Uvedená interaktívna pomôcka umožňuje meniť veľkosť daného uhla a taktiež meniť polohu ramien uhla. Zobrazená je aj informácia o veľkosti uhla, ktorú možno z didaktických dôvodov skryť. Na určovanie veľkostí uhlov je určená aj vzdelávacia aplikácia ([obr. 6b](#)) s názvom „Meranie uhlov“ so spätnou väzbou v tvare zvukového efektu a vypísanej informácie o úspešnosti, resp. neúspešnosti merania. Výhodou tejto aplikácie je, že virtuálnym uhlomerom možno otáčať a nastaviť do správnej polohy. Uhly sú generované v rozsahu od 0° do 180° , výsledok merania sa zapisuje do určeného poľa v celých stupňoch a tolerancia chyby je 1° .



Obr. 6 a) b) Interaktívne vyučovacie pomôcky určené na určovanie veľkostí uhlov
http://www.webmatika.sk/zadania/uhol/meranie_uhol.html
<http://www.mathplayground.com/measuringangles.html>

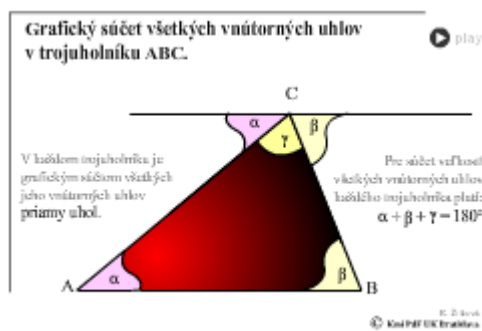
Po získaní dostatočných skúseností s meraním uhlov možno vyučovacie aktivity zamerať na odhadovanie veľkostí uhlov. Na [obr. 7](#) je zobrazená pomerne vydarená interaktívna matematická hra určená na nastavenie polohy ramien uhla s požadovanou veľkosťou.



Obr. 7 Matematická interaktívna hra určená na odhad veľkostí uhlov daných v stupňovej miere
<http://www.mathplayground.com/alienangles.html>

2.6 Veta o súčte vnútorných uhlov v trojuholníku

Schopnosť argumentácie a dokazovania je považovaná z hľadiska abstrakcie v matematike za veľmi dôležitý stupeň poznávania. Snáď najzávažnejším a najviac vyskytujúcim sa problémom je otázka formálnosti zvládnutia matematických viet a vzorcov. V základnom učive o uhloch je často využívanou veta o súčte vnútorných uhlov v trojuholníku.



Obr. 8 Vizualizácia vety o súčte vnútorných uhlov v trojuholníku ABC
<http://www.webmatika.sk/animacie/II.stupen/troj3.html>

Na základe vývoja argumentačného myslenia (Hejný a kol., 1990, str. 339-343) sa možno v každej z jednotlivých úrovní (predargumentačná, argumentácia konkrétnymi príkladmi, predmetným reprezentantom, lokálny dôkaz a axiomatický dôkaz) didakticky vhodným prístupom podieľať na ontogenéze zdôvodňovania. Priloženú animáciu (obr. 8) možno v uvedenom zmysle zaradiť do kategórie lokálneho dôkazu, ktorý je najčastejšie využívaný na strednej škole.

3 Záver

Experimentovanie a nadobúdanie remeselníckych skúseností sú ako zdroje matematického poznávania nezastupiteľné. V modernom vzdelávaní je však dôležité ponúknuť ako súčasť abstrakčného procesu aj vytváranie a používanie matematických modelov v inovovanom prostredí. Informačné a komunikačné technológie umožňujú transformovať a modelovať matematické problémy rôznymi formami a spôsobmi. K najhodnotnejším elektronickým didaktickým materiálom patria tie, ktoré svojou interaktivitou zachovávajú možnosť virtuálneho skúmania a experimentovania, resp. svojou dynamikou simulujú rôzne reálne, ale aj virtuálne procesy. O ďalších pedagogických, sociologických a kurikulárnych aspektoch vyplývajúcich z využívania IKT vo vyučovaní (matematiky) pojednáva J. Vaníček (str. 11 - 38). Autor sa zameriava špeciálne na technológie, ktoré sú „prítomné pri poznávaní a v priebehu poznávacieho procesu“, pričom pre uvedenú kategóriu aplikuje názov počítačové kognitívne technológie.

V príspevku sú uvedené autorské, ale aj prebrané ukážky, ktorých obsahové zameranie je cielené na základné učivo o uhloch. Spôsob ich využitia vo vyučovaní matematiky podlieha výberu vyučovacej metódy samotným učiteľom. Zámerom tvorby animovaných ukážok a konštrukčných zadaní je poskytnúť nové, atraktívne, matematické pomôcky dostupné na Internete a využiteľné buď priamo vo vyučovacom procese, alebo aj v domácom prostredí.

Príspevok bol spracovaný ako súčasť grantového projektu s názvom „Školská matematika v prostredí IKT“ (MŠ SR KEGA 3/6021/08).

Literatúra

- [1] Hejný, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*. Bratislava: SPN, 1990. 560 s. ISBN 80-08-01344-3
- [2] Híc, P. – Pokorný, M.: Od počítačom podporovaného vyučovania k e-learningu. In: *IKT vo vyučovaní matematiky*. Nitra: UKF, str. 55-62, 2005. ISBN 80-8050-925-5

- [3] Šedivý, O. – Čeretková, S. – Malperová, M.: *Matematika pre 5. ročník ZŠ* (1. časť). Bratislava: SPN, 1997. 126 s. ISBN 80-08-01435-0
- [4] Šedivý, O. - Križalkovič, K.: *Didaktika matematiky pre štúdium učiteľstva 1. stupňa ZŠ*. Bratislava: SPN, 1990. 272 s. ISBN 80-08-00378-2
- [5] Vaníček, J.: *Počítačové kognitívne technológie ve výuce geometrie*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2009. 212 s. ISBN 978-80-7290-394-8
- [6] Žilková, K.: *Školská matematika v prostredí IKT*. Bratislava: Univerzita Komenského, 2009. 138 s. ISBN 978-80-223-2555-4
- [7] <http://www.mathsisfun.com/geometry/construct-anglesame.html>
- [8] <http://www.mathplayground.com/measuringangles.html>
- [9] <http://www.mathplayground.com/alienangles.html>
- [10] www.webmatika.sk

Kontaktná adresa

PaedDr. Katarína Žilková, PhD.
Pedagogická fakulta
Univerzita Komenského v Bratislave
Račianska 59, 813 34 Bratislava
katarina@zilka.sk