

Skúmanie a modelovanie rôznych typov závislostí

Investigation and modelling of the different types of dependencies



Stanislav Lukáč

Abstract

The development of real-life problem solving abilities is an important aim in mathematics teaching. The different types of dependencies can be applied to characterize patterns and relationships between quantities in the investigated real situations. Misunderstanding of differences between various types of dependencies and insufficient skills in mathematical expression of quantitative relationships can lead to mistakes in application of correct type of dependency for the mathematical representation of a real situation. The paper is focused on the investigation of the different types of dependencies representing the mathematical basis of solving the selected real-life problems. New information technologies are used to analyze the quantitative relationships and to model dependencies between data using different representations and models.

Keywords

Dependence, representations, modelling, problem solving, ICT, mathematics teaching.

1 Úvod

V moderných koncepciách vzdelávania sa posúvajú ciele od kvantít osvojených poznatkov ku kvalite, ktorá sa prejavuje v porozumení poznatkov a v schopnosti vedieť aplikovať osvojené poznatky pri riešení rôznych druhov problémov. V učebných aktivitách by nemalo prevládať memorovanie matematických vzťahov a formálne osvojovanie algoritmov, ale učebný proces by mal byť založený na aktívnom učení sa vyžadujúcom samostatné skúmanie vzťahov medzi objektmi, vyslovovanie hypotéz, verifikáciu a zdôvodňovanie objavených zistení. Pri zabezpečení podmienok pre aktívne učenie sa je potrebné vytvoriť podnetné vzdelávacie prostredie, v ktorom môžu žiaci experimentovať, identifikovať nejasnosti, formulovať otázky a hľadať na ne odpovede.

Moderné informačné a komunikačné technológie (IKT) poskytujú prostriedky, ktoré možno využiť pri vytvorení stimulujúceho vzdelávacieho prostredia umožňujúceho aktívne osvojovanie poznatkov. IKT umožňujú dať matematickým objektom a vzťahom konkrétnejšiu podobu, vizualizovať dynamické procesy a umožniť tak žiakom manipulovať s objektmi a skúmať vzťahy medzi nimi. Žiaci môžu získavať nové matematické skúsenosti pri aktívnej práci s informáciami, pri analýze a spracovaní numerických aj grafických údajov, pri modelovacích aktivitách založených na skúmaní a charakterizovaní vzťahov medzi komponentmi modelu. Integrácia IKT do matematického vzdelávania prináša podľa Wonga [10] tieto základné možnosti:

- Jednoduchšie a pre žiakov prístupnejšie skúmanie zákonitostí a vzťahov medzi údajmi využitím obrázkov, grafov, animácií, tabuliek a algebrických formúl.
- Uľahčenie rutinných a zložitejších výpočtov, implementáciu matematických algoritmov.
- Simuláciu a modelovanie založené na využívaní rôznych typov modelov, manipulácii s geometrickými útvarmi v dynamických konštrukciách.
- Zovšeobecňovanie zamerané na formulovanie všeobecných tvrdení a rozširovanie riešení problémov na celú triedu podobných problémov zavedením parametrov.

V príspevku je prezentovaných niekoľko námetov predstavujúcich úlohy z bežného života, riešenie ktorých vyžaduje správny výber a aplikovanie základných typov funkčných závislostí medzi údajmi, ktoré sú vyučované v školskej matematike. Pri analýze údajov a pri práci s aritmetickými a grafickými modelmi sú využívané nástroje, ktoré poskytujú dynamický geometrický systém Cabri Geometry a tabuľkový kalkulačtor MS Excel.

Dynamické geometrické systémy umožňujú prostredníctvom manipulovania s voľnými prvkami konštrukcie skúmať invariantné vlastnosti geometrických útvarov a vzťahy medzi prvkami konštrukcie. Prekresľovanie viazaných prvkov konštrukcie sa realizuje na základe pravidiel odvodených zo vzťahov medzi geometrickými objektmi. Dynamické geometrické systémy umožňujú aj zisťovanie mier útvarov a výpočty s nameranými hodnotami pomocou špeciálnej kalkulačky, ktorá dokáže nahradiť konkrétne hodnoty premennými, ktoré nadobúdajú rôzne hodnoty pri manipulácii s geometrickými útvarmi. Tieto nástroje ponúkajú vhodný aparát na vizualizáciu a skúmanie závislostí medzi veličinami.

Tabuľkové kalkulatory disponujú matematickými prostriedkami využiteľnými pri riešení rôznych typov matematických problémov. Výpočty v tabuľkách sa realizujú na základe predpisov vyjadrujúcich charakteristiku väzieb medzi údajmi. Tieto predpisy sú zapisované vo forme vzorcov, v ktorých namiesto konkrétnych údajov vystupujú špeciálne premenné vyjadrujúce adresy buniek, v ktorých sú uložené údaje. V tabuľkových kalkulatoroch sú implementované matematické metódy

na analýzu údajov, finančné výpočty, iteračné výpočty umožňujúce riešenie rovníc a problémov lineárnej optimalizácie a mnoho ďalších typov výpočtov. Vzťahy medzi údajmi v tabuľkách možno graficky interpretovať pomocou prehľadných grafov. Tabach a Friedlander [7] charakterizujú možnosti využitia tabuľkových kalkulátorov pri nasledovných typoch vzdelávacích aktivít:

- Produkujúce aktivity – vyžadujú skúmanie kvantitatívnych vzťahov medzi objektmi a formulovanie výrazov a rovníc v tvare vzorcov.
- Transformačné aktivity – zahŕňajúce úpravy výrazov, zmenu výrazov a rovníc za účelom zachovania správnosti riešenia pôvodného problému alebo pri modifikovaní problému.
- Globálne meta-aktivity – riešenie problémov a zovšeobecňovanie získaných výsledkov, analýza údajov a charakteristika vývojových trendov, modelovanie.

2 Charakteristika kvantitatívnych vzťahov

Pochopenie rôznych typov závislostí a schopnosť správne zvoliť typ závislosti pri charakterizovaní vzťahov medzi veličinami môže predstavovať základ riešenia reálnych problémových situácií. Jednoduché závislosti medzi údajmi vnímajú deti už aj v predškolskom veku a postupne sa rozvíjajú ich intuitívne predstavy o kvantitatívnych vzťahoch medzi veličinami. Prvé predstavy vedúce k vnímaniu závislostí sú spojené s bežnými veličinami, ako je veľkosť, hmotnosť, ceny pri nákupoch, zmeny polohy a vzdialenosti rovnomerne sa pohybujúcich objektov a pod. Pri opisovaní jednoduchých vzťahov v uvedených prípadoch možno využiť väčšinou priamu úmernosť, predstavujúcu špeciálny typ lineárnej závislosti. Skutočnosť, že prvé predstavy žiakov o vzťahoch medzi údajmi sú spojené s lineárnou závislosťou, môže ovplyvňovať žiakov aj pri riešení úloh, v ktorých vzťahy medzi veličinami nemožno charakterizovať týmto typom závislosti.

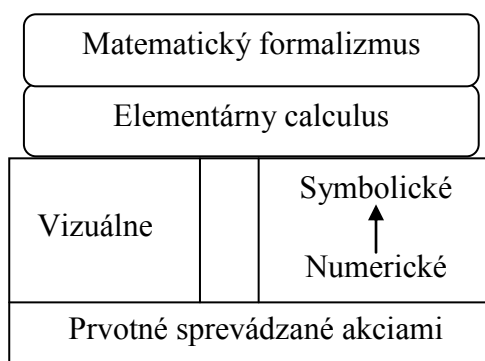
De Bock a kol. uvádzajú v publikácii [2] výsledky výskumu zameraného na zisťovanie porozumenia lineárnej závislosti a schopnosti vedieť si správne vybrať medzi lineárnou a kvadratickou závislosťou pri charakterizovaní vzťahov v problémovej situácii. Vo výskume bola využitá aj nasledovná úloha: *Ellen a Kim bežia rovnakou rýchlosťou po kruhovej dráhe. Ellen vyštartovala neskôr a keď prebehla 5 kôl, tak Kim už prebehla 15 kôl. Koľko kôl prebehla Kim v čase, keď Ellen prebehla práve 30 kôl?* Úlohu vyriešilo v 3. ročníku správne len 53% žiakov. V 8. ročníku vyriešilo úlohu správne 93% žiakov. Slabé výsledky dosiahli žiaci pri riešení tejto úlohy: *Farmár potrebuje približne 8 hodín, aby zorol pole v tvare štvorca so stranou 200 m. Koľko hodín by potreboval na zoranie poľa v tvare štvorca so stranou 600 m?* Viac ako 90% z 12 ročných žiakov a viac než 80% zo 16 ročných žiakov vyriešilo úlohu nesprávne, lebo vybrali na opísanie tejto reálnej situácie lineárnu závislosť.

Tendenciu žiakov preferovať lineárnu závislosť pri charakterizovaní vzťahov medzi veličinami opisuje vo svojom článku aj Knoche [5]. Na ilustráciu sme vybrali nasledovnú úlohu: *V banke ponúkajú klientom dva produkty na zhodnotenie úspor počas dvoch rokov. V produkte A sa v prvom roku úročí vložená suma 3% a v druhom roku sa navýšená suma úročí 5%. Produkt B ponúka v prvom roku úročenie 4% a v druhom roku úročenie navýšenej sumy taktiež 4%. Rozhodnite, ktorý produkt je pre klienta výhodnejší: a) produkt A, b) produkt B, c) obidva produkty sú rovnako výhodné.* Väčšina žiakov na druhom stupni základnej školy zvolila možnosť c) a teda na zložené úrokovanie nesprávne aplikovali lineárnu závislosť.

Uvedené výsledky naznačujú, že niektorí žiaci nemajú dostatočne rozvinuté schopnosti rozlišovať rozdiely medzi jednotlivými typmi závislostí a preto majú problémy aj pri aplikovaní správneho typu

závislosti pri riešení úloh. Pre lepšie porozumenie jednotlivých typov závislostí je vhodné, aby žiaci mohli vykonávať výpočty s konkrétnymi číslami a výsledky zapisovať do prehľadných tabuliek. Ešte lepšiu predstavu o závislostiach medzi veličinami ponúkajú grafy a dynamické konštrukcie. Po výpočtoch v tabuľkách a analýze grafických informácií možno závislosti medzi údajmi charakterizovať aj symbolicky pomocou výrazov a rovníc. Skúmanie rôznych reprezentácií reálnych objektov a vzťahov umožňuje rozvíjanie predstáv a porozumenia funkčných závislostí. IKT prinášajú potenciál pre vizualizáciu a využívanie rôznych typov reprezentácií. Môžu poskytnúť žiakom nový typ praktických skúseností umožňujúcich pochopenie matematických poznatkov.

Tall [8] vytvoril na základe Brunerovej konštruktivistickej teórie reprezentácií model vývoja reprezentácií pri budovaní koncepcie matematických výpočtov a štruktúr (pozri obrázok 1).



Obr. 1 Model reprezentácií

Pre prvotné reprezentácie zaviedol Bruner termín „enactive“. Vyjadrujú prvé skúsenosti detí s modelovaním konkrétnych reálnych objektov doprevádzaným aj pohybovými úkonmi. Vo vyučovaní matematiky môžu byť prvotné reprezentácie spojené s hrami, ako je napríklad stavanie kociek.

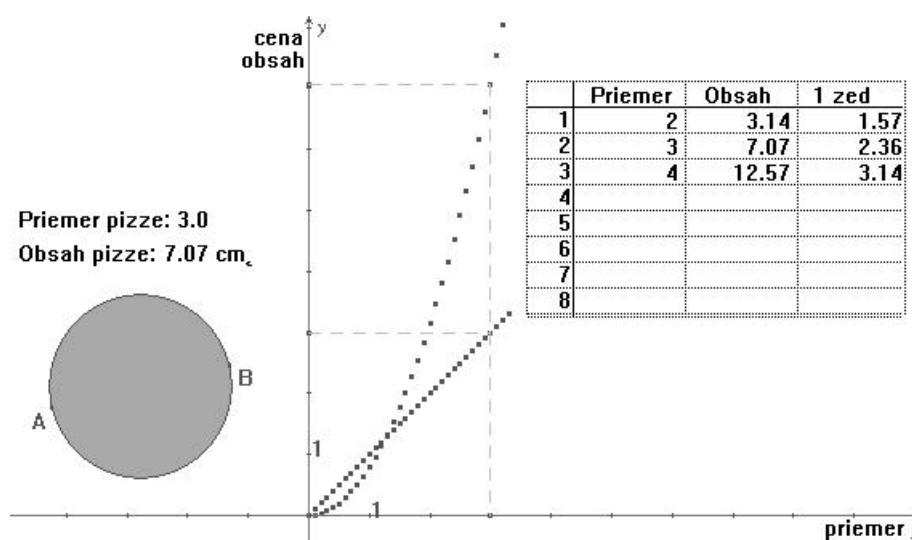
Pri riešení reálnych problémov je potrebné identifikovať objekty, preskúmať ich štruktúru a vzťahy medzi komponentmi. V ďalšom kroku sa nahrádzujú originálne objekty matematickými a vzťahy medzi nimi sa vyjadrujú pomocou výrazov, rovníc, nerovníc a funkcií. Proces transformácie reálneho problému na matematický je základom matematického modelovania. Modelovanie poskytuje príležitosti pre využívanie rôznych typov reprezentácií reálnych objektov. Práca s rôznymi reprezentáciami uľahčuje pochopenie matematického obsahu v reálnych problémoch a hľadanie rôznych metód riešenia. Modelovanie je neoddeliteľnou súčasťou riešenia reálnych problémov. Vo vyučovaní matematiky majú dôležité postavenie modelovacie aktivity zamerané na prácu s rôznymi typmi modelov, počnúc od aritmetických a grafických až po algebraicko-analytické. Aritmetické operácie sú základom aritmetických modelov, ktoré môžu byť vyjadrené vo forme tabuliek. Žiaci môžu využiť aritmetické modely pri numerickej reprezentácii reálnych objektov a skúmaní vzťahov medzi nimi. Aritmetické modely poskytujú základ pre viac sofistikované modely využívané v geometrii, algebre a analýze.

3 Námety na skúmanie závislostí

V ďalšej časti príspevku budú vytvárané rôzne typy modelov umožňujúce skúmanie závislostí pri riešení problémov z reálneho života. V prostredí Cabri geometrie môžu žiaci využívať rôznorodé nástroje pri grafickom vyjadrení závislostí medzi veličinami a tvorbe tabuliek obsahujúcich konkrétne hodnoty skúmaných veličín aj bez využívania symbolických formúl. Tento spôsob modelovania umožňuje budovanie predstáv o závislostiach na intuitívnej úrovni. V prostredí tabuľkového kalkulátora možno vytvárať aritmetické modely a na nich odvodené grafy na základe vyjadrovania vzťahov medzi veličinami pomocou vzorcov predstavujúcich symbolické reprezentácie skúmaných objektov a vzťahov.

3.1 Lineárna a kvadratická závislosť

Na porovnanie lineárnej a kvadratickej závislosti sa hodí úloha, ktorú sme vybrali z publikácie [6]. *Pizzéria ponúka dve okrúhle pizzy tej istej hrúbky, ale rozličnej veľkosti. Menšia má priemer 30 cm a stojí 30 zed. Väčšia má priemer 40 cm a stojí 40 zed. Ktorá pizza je cenovo výhodnejšia?* V programe Cabri vytvoríme kruh predstavujúci pizzu, ktorého priemer bude zviazaný s číselným údajom. 1 cm na výkrese predstavuje priemer pizze s veľkosťou 1 dm. Využijeme možnosť programu odmerať obsah pizze a veľkosť obsahu spolu s cenou pizze naniesieme v súradnicovej sústave na os y. Po nastavení stopy pre body v súradnicovej sústave a zmenách veľkosti priemeru pizze získame body z grafov znázorňujúcich lineárnu závislosť ceny od priemeru pizze a kvadratickú závislosť obsahu pizze od jej priemeru. Získané grafy sú zobrazené na obrázku 2.



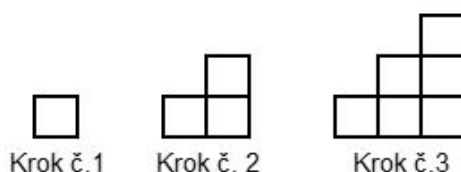
Obr. 2 Lineárna a kvadratická závislosť ([pizza.fig](#))

Na obrázku 2 je zobrazená aj tabuľka, do ktorej možno vkladať konkrétne číselné údaje pri nastavení vybranej hodnoty priemeru pizze. Keďže cena pizze má rovnakú hodnotu ako priemer pizze, nie je v tabuľke uvedená v samostatnom stĺpci. V poslednom stĺpci je pomocou kalkulačky programu Cabri vypočítaná aj veľkosť kúska pizze pripadajúceho na 1 zed.

Pre detailnejší pohľad na zmeny jednej veličiny v závislosti od druhej veličiny pri lineárnej závislosti uvedieme ešte dve úlohy. Prvá úloha je zameraná na využitie numerickej reprezentácie pri skúmaní lineárnej závislosti. *Prvý druh pizze sa predáva za 2,25 EUR. Vypočítajte, koľko je to*

dolárov, ak $1 \text{ EUR} = 1,417 \text{ USD}$. Vyjadrite cenu v dolároch aj pre ďalší druh pizze, ak sa predáva za 6,75 EUR. Pomocou kalkulačky sa dá úloha vyriešiť veľmi rýchlo. Pri tradičnom počítaní by si snád žiaci uvedomili, že možno využiť priamu úmernosť a cena druhej pizze vyjadrená v dolároch je trikrát väčšia ako cena prvej pizze v dolároch. Druhá úloha už vyžaduje porozumenie symbolickej reprezentácie veličín zviazaných lineárnou závislosťou. Na prevod veľkosti teploty vyjadrenej v $^{\circ}\text{F}$ a v $^{\circ}\text{C}$ sa využíva vzťah $C = 5(F - 32)/9$. Vyjadrite v $^{\circ}\text{F}$ teploty 15°C a 60°C . Na základe symbolickej reprezentácie by si mali žiaci uvedomiť, aký typ závislosti sa uplatňuje medzi číselnými hodnotami teplôt vyjadrených v daných stupniciach. V tomto prípade už žiaci nemôžu teplotu vyjadrenú v $^{\circ}\text{F}$ odpovedajúcu 15°C jednoducho vynásobiť číslom 4. Žiaci by v prípade potreby mohli vytvoriť aj prevodovú tabuľku a graf, aby si uvedomili, že pri všeobecnej lineárnej závislosti, ak sa o rovnaké hodnoty mení jedna veličina, tak sa o rovnaké hodnoty mení aj závislá veličina.

Pre porozumenie kvadratickej závislosti by žiaci mali poznať, ako sa menia hodnoty závislej veličiny vyvolané rovnomernými zmenami inej veličiny. Spoznanie kvadratickej závislosti vo vzťahu dvoch veličín uľahčuje odvodenie symbolickej reprezentácie skúmanej závislosti. Na skúmanie závislosti a hľadanie jej symbolickej reprezentácie je určená nasledovná úloha: *Deti skladali z kociek schody podľa obrázka 3. Určte, z koľkých kociek budú postavené schody v každom ďalšom kroku v nasledujúcich troch krokoch. Nájdite všeobecný vzťah pre počet kociek v jednotlivých krokoch stavby schodov.*



Obr. 3 Stavba schodov ([schody.xls](#))

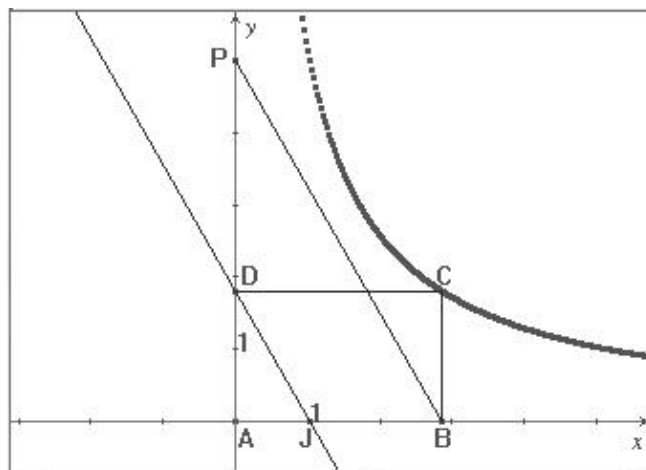
Na skúmanie číselných údajov a vzťahu medzi nimi je vhodné vytvoriť tabuľku a grafickú reprezentáciu vyšetrovanej závislosti. Aj keď sú výpočty jednoduché, možno využiť na skúmanie jednotlivých reprezentácií závislosti medzi počtom kociek a poradového čísla kroku tabuľkový kalkulátor. Po zistení skutočnosti, že pre jednotlivé kroky sa počet nových kociek rovnomerne zvyšuje o číslo 1, by si mali žiaci uvedomiť, že skúmaná závislosť je kvadratická. Po nájdení symbolickej reprezentácie tejto závislosti pomocou riešenia sústavy lineárnych rovníc možno pridať do tabuľky nový stĺpec na výpočet počtu kociek v jednotlivých krokoch na základe vzorcov.

3.2 Ďalšie typy závislostí

V ďalšom námete sa sústreďíme na skúmanie nepriamej úmernosti. Na vyšetrovanie priebehu tejto závislosti budú využité geometrické vzťahy, ktoré platia medzi podobnými trojuholníkmi. Zadané úlohy je nasledovné: *Školník má na výrobu obdĺžnikovej nástenky jednu tubu lepidla, pomocou ktorého môže nalepiť na lepenku 5 m^2 korku. Aké rozmery by mal zvoliť pre nástenku, aby mala čo najmenší obvod?* Základom riešenia úlohy bude skúmanie závislosti medzi dĺžkami susedných strán obdĺžnika s konštantným obsahom. Po grafickom vyjadrení tejto závislosti budú môcť žiaci pomocou experimentovania s dynamickou konštrukciou hľadať odpoveď na zadanú otázku. Jednoduchá manipulácia s obdĺžníkmi s rovnakým obsahom a využitie príkazu na odmeranie

obvodu obdĺžnika by malo žiakov viesť k domnienke, že spomedzi všetkých obdĺžnikov s rovnakým obsahom má najmenší obvod štvorec. Zdôvodnenie tejto hypotézy môže byť pre žiakov jednoduchým cvičením pri preberaní základov diferenciálneho počtu.

Dynamická konštrukcia s grafickým vyjadrením skúmanej závislosti je zobrazená na obrázku 4.



Obr. 4 Nepriama úmernosť ([graf nepriamej umernosti.fig](#))

V súradnicovej sústave reprezentuje vzdialenosť bodu P od počiatku veľkosť obsahu obdĺžnikovej nástenky. Pevný bod J má od počiatku vzdialenosť 1. Po zvolení ľubovoľného bodu B na osi x bola zostrojená rovnobežka s úsečkou BP prechádzajúca bodom J. V jej priesečníku s osou y je zostrojený bod D. Podľa vety uu sú trojuholníky AJD a ABP podobné. Preto platí: $|AP|/|AD| = |AB|/|AJ|$. Keďže úsečka AJ má dĺžku 1, platí že súčin dĺžok strán AB a AD je rovný dĺžke úsečky AP. Aj pri pohybe bodu B po osi x je obsah obdĺžnika ABCD stále rovný dĺžke úsečky AP. Závislosť zmeny dĺžky strany AD vyvolanej zmenou dĺžky strany AB reprezentuje stopa bodu C na výkrese. Po zmeraní obvodu obdĺžnika ABCD možno posúvaním bodu B hľadať obdĺžnik ABCD s minimálnym obvodom. Posunutie bodu P na osi y umožňuje skúmanie obdĺžnikov s iným obsahom.

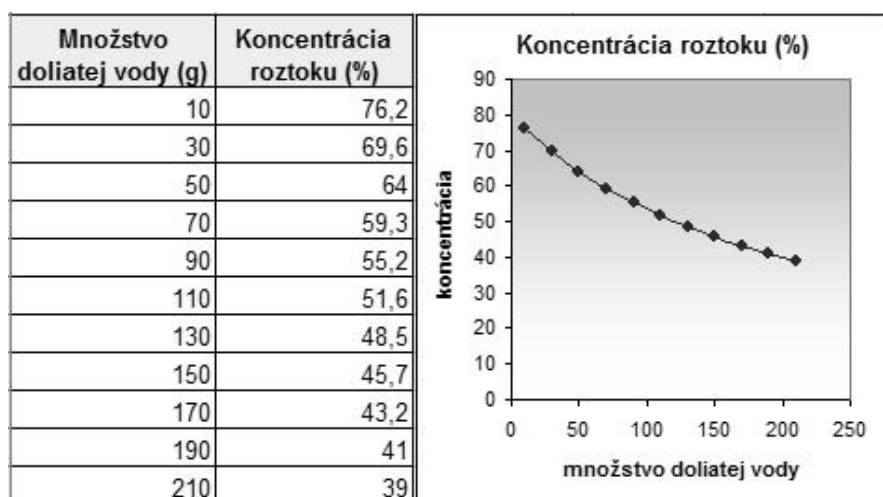
Na skúmanie závislosti, ktorej grafické vyjadrenie predstavuje časť hyperboly, je zameraná aj nasledujúca úloha: *Preskúmajte, ako klesá koncentrácia roztoku kuchynskej soli po dolievaní vody do roztoku.* Na skúmanie tejto závislosti vytvoríme jednoduchý aritmetický model vo forme tabuľky, ktorý sa bude dať využiť na riešenie všeobecnejšej úlohy zameranej na určovanie výslednej koncentrácie roztoku, ktorý vznikol zmiešaním dvoch roztokov. Základom aritmetického modelu sú vzorce na výpočty s percentami, pomocou ktorých sú vyhodnocované výsledky pre zadané číselné údaje. Opisovaná tabuľka je zobrazená na obrázku 5.

B4		fx =D4/C4*100		
	A	B	C	D
1		Koncentrácia roztoku (%)	Množstvo (g)	Obsah soli (g)
2	roztok1	80	200	160
3	roztok2	20	50	10
4	zmiešaný	68,00	250	170

Obr. 5 Výpočet koncentrácie zmiešaného roztoku ([miešanie roztokov.xls](#))

Vstupné údaje sú zadané v oblasti B2:C3. Obsah soli v prvom roztoku je vypočítaný podľa vzorca: $=C2/100*B2$. Uvedený vzorec možno skopírovať aj pre druhý roztok. V bunkách C4 a D4 sú vypočítané súčty hmotností roztokov a obsahu soli v roztokoch. Koncentrácia zmiešaného roztoku je vypočítaná v bunke B4. Vzorec uložený v tejto bunke je zobrazený vo vzorcovom paneli na obrázku 5. Vytvorený aritmetický model možno využiť nielen na výpočet koncentrácie roztoku získaného zmiešaním dvoch roztokov, ale aj na výpočet koncentrácie roztoku po jeho zriedení vodou. V takomto prípade zadáme do bunky B3 ako koncentráciu druhého roztoku číslo 0. Skôr, ako sa pustíme do skúmania závislosti koncentrácie roztoku od množstva dolievanej vody, by sme radi podotkli, že vytvorený aritmetický model môžu žiaci využiť aj pri riešení úloh vyžadujúcich zistiť množstvo vody, ktoré je potrebné doliať do roztoku, aby sme získali roztok s požadovanou koncentráciou. Od žiakov sa bude očakávať, že budú postupne meniť hodnoty v bunke C3, kým sa im nepodarí získať požadovanú koncentráciu v bunke B4.

Postupné zmeny hodnôt v bunke C3 využijeme aj pri skúmaní závislosti zo zadania úlohy. Pre prvý roztok necháme údaje v pôvodnom stave. Keďže druhým roztokom bude voda, tak do bunky B3 vložíme 0 a do bunky C3 vložíme údaj predstavujúci začiatkové množstvo vody, napríklad 10g. Množstvo vody možno postupne zväčšovať a hodnoty koncentrácie roztoku zapisovať do novej tabuľky. Vytvorená tabuľka spolu s grafom zobrazujúcim závislosť koncentrácie roztoku od množstva dolievanej vody je zobrazená na obrázku 6.



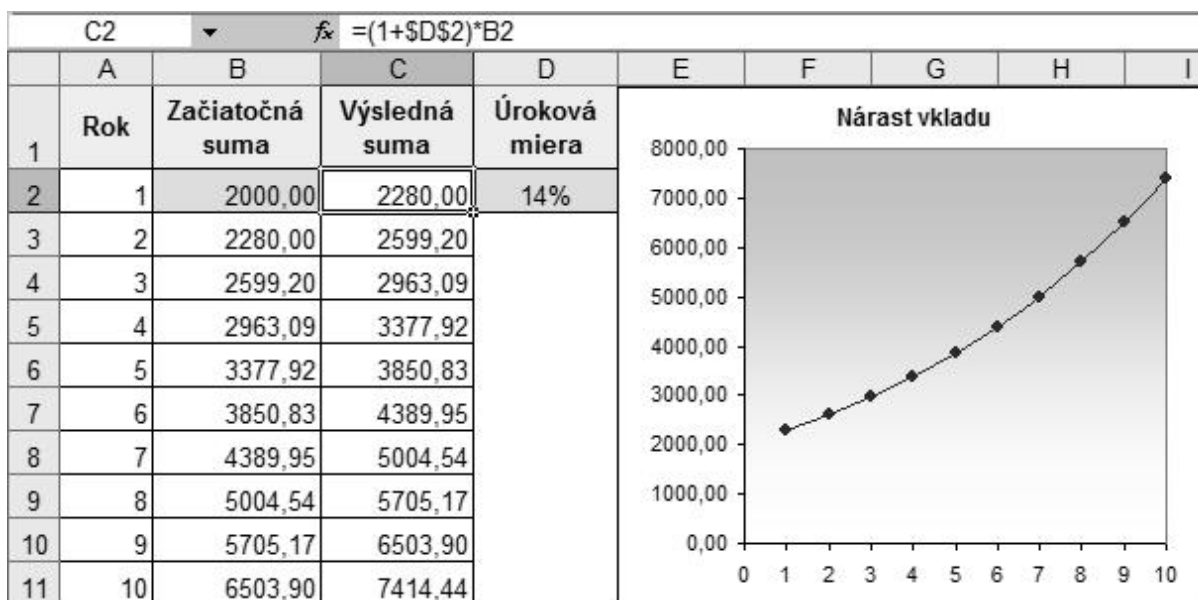
Obr. 6 Závislosť koncentrácie roztoku od množstva doliatej vody ([miešanie roztokov.xls](#))

Ako symbolická reprezentácia závislosti koncentrácie roztoku od množstva doliatej vody by mohla byť využitá zmiešavacia rovnica. Po vyjadrení koncentrácie zriedeného roztoku získame predpis pre lineárnu lomenú funkciu, ktorej grafom je hyperbola.

Na výpočtoch s percentami je založený aj posledný model, pomocou ktorého možno skúmať rýchlosť rastu vlozenej sumy na bankovom účte pri zloženom úrokovaní. Žiakom by mohla byť zadaná nasledovná úloha: *Pán Novák si uložil na účet na začiatku roka sumu 2000 EUR. Banka mu garantuje každoročné úročenie vkladu úrokovou mierou 14%. Vypočítajte, akú sumu bude mať pán Novák uloženú na účte na konci každého roka počas nasledujúcich desiatich rokov.*

Veľkosť nasporenej sumy na konci ľubovoľného roka možno určiť pomocou vzorca na výpočet členov geometrickej postupnosti. My však vytvoríme jednoduchší model založený na rekurentnom

vzťahu, ktorý charakterizuje lokálny vzťah medzi sumou na konci roka zväčšenou o úrok a sumou na začiatku roka. Základom zostaveného aritmetického modelu je iteračný výpočet predstavujúci opakujúci sa výpočtový proces, v ktorom hodnota vypočítaná v jednom kroku je využitá ako vstupná hodnota pre nový výpočet. Vytvorenú tabuľku rastu vkladu na účte počas desiatich rokov a graf závislosti veľkosti nasporenej sumy od času zobrazuje obrázok 7.



Obr. 7 Nárast vkladu na účte počas desiatich rokov ([úrokovanie.xls](#))

Vzorec zapísaný v bunke C2 je zobrazený vo vzorcovom paneli na obrázku 7. Do bunky B3 sa preniesie táto hodnota pomocou jednoduchého vzorca =C2. Uvedené vzorce sú skopírované do ďalších riadkov tabuľky. Na základe číselných údajov v stĺpcoch A a C je vytvorený graf, ktorý vyjadruje exponenciálnu závislosť medzi veľkosťou sumy na účte na konci každého roka a časom. Po zväčšení úrokovej miery v bunke D2 sa prejaví exponenciálny charakter tejto závislosti ešte výraznejšie.

4 Záver

Skúmanie vzťahov medzi veličinami pomocou ich rôznych reprezentácií a využívanie jednoduchých modelov umožňujúcich manipulovanie s objektmi a vizualizáciu objektov a vzťahov medzi nimi môže pomôcť sprístupniť žiakom abstraktnú matematiku názornejším a zrozumiteľnejším spôsobom. Modelovacie aktivity ponúkajú vo vyučovaní matematiky príležitosti pre skúmanie rôznych reprezentácií veličín a vzťahov vystupujúcich v problémových situáciách a napomáhajú rozvíjať schopnosť žiakov vytvárať algebraicko-analytické matematické modely reálnych situácií. Moderné informačné technológie prinášajú bohatý arzenál výkonných prostriedkov, ktoré umožňujú nové prístupy k skúmaniu rôznych reprezentácií veličín a využívanie rôznych typov modelov vo vyučovaní matematiky. Využívanie týchto prostriedkov môže mať priaznivý dopad na mnohé oblasti matematického vzdelávania a môže prispieť k rozvíjaniu matematických kompetencií žiakov umožňujúcich aplikovanie matematických poznatkov pri riešení problémov z reálneho života.

Literatúra

- [1] Cechlárová, K., Poráčová, A.: Úrokový počet pomocou tabuľkového kalkulátora. In: Matematika – Fyzika – Informatika. Prometheus Praha, číslo 2, 2003, s. 108-118.
- [2] De Bock, D., Van Dooren, W., Janssens, D.: Studying and remedying students' modeling competencies: Routine behaviour or adaptive expertise. In: Modelling and Applications in Mathematics Education (editor: Blum, W. et al.). Springer Science+Business Media, 2007, s. 241-248.
- [3] Hátle, J.: Úloha učiteľa pri výučbe matematiky podporované počítačom. In: Sborník príspevků 3. konference Užití počítačů ve výuce matematiky. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2007, s. 73-76.
- [4] Jančařík, A., Hošpesová, A., Dvořák, P.: Využití programu MS Excel v práci učitele matematiky. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, 2007, 59 s. ISBN 978-80-7290-300-9.
- [5] Knoche, N.: Analysisunterricht unter dem Lernziel „Mathematische Grundbildung“. In: Konferencia Matematika v škole dnes a zajtra. Ružomberok, 2002, s. 32-39.
- [6] PISA – Matematika úlohy 2003. Štátny pedagogický ústav. Bratislava, 2004, 40 s. ISBN 80-85756-89-7.
- [7] Tabach, M., Friedlander, A.: Understanding Equivalence of Symbolic Expressions in a Spreadsheet-Based Environment. In: International Journal of Computers for Mathematical Learning, January, 2008, s. 27-46.
- [8] Tall, D.: Functions and Calculus. In: International Handbook of Mathematics Education (editor: Bishop, A., J. et al.), Kluwer Academic Publishers, London, 1996, s. 289-326.
- [9] Vaníček, J.: Geometrie na počítači: mřížové body. In: Matematika – Fyzika – Informatika. Prometheus Praha, číslo 1, 2001, s. 46-52.
- [10] Wong, N., Y.: The Influence of Technology on the Mathematics Curriculum. In: Second International Handbook of Mathematics Education (editor: Bishop, A., J. et al.), Kluwer Academic Publishers, London, 2003, s. 271-318.
- [11] Žilková, K.: Školská matematika v prostředí IKT. Univerzita Komenského Bratislava, 2009, 136 s. ISBN 978-80-223-2555-4.

Kontaktná adresa

RNDr. Stanislav Lukáč, PhD.
Prírodovedecká fakulta UPJŠ v Košiciach
Jesenná 5, 040 01 Košice
stanislav.lukac@upjs.sk