

# Rekurzia – efektívny nástroj na riešenie špecifických matematických problémov

Recursion – an effective tool for solving particular mathematical problems



Lýdia Kontrová – Tomáš Lengyelfalusy

## Abstract

Key point while introducing computers to the process of education, is to identify the appropriate topics to do this. This and also the way specific usage of computers, is primary the teachers responsibility. This article presents one way, how to motivate the students by showing them the symbiosis between mathematics and computer science in the process of solving the recurrent mathematical problems.

## Keywords

The recurrent mathematical problems, recursion, Heron's method, MS Excel

# 1 Úvod

Pozícia počítačov a počítačových technológií v edukácii sa za posledných 10 rokov výrazne zmenila. Kým na začiatku stáli v centre záujmu pedagogickej verejnosti samotné počítače so svojím potenciálom, dnes ich viac vnímame ako medziodborový nástroj integrujúci a prenikajúci všetky oblasti nášho života. Kým ešte nedávno sme hovorili o informatizácii škôl (v zmysle zabezpečovania potrebnej výpočtovej techniky a softvérového vybavenia), dnes sa už viac hovorí o informatizácii separátnych predmetov v zmysle kontinuálneho používania počítačových technológií ako prostriedku, asistenta či partnera pri ich vyučovaní. Najmarkantnejšou je kolaborácia a symbióza počítačových technológií práve s matematikou.

Na jednej strane tu máme stroj, ktorý rýchlo a presne vykonáva komplikované výpočty, na strane druhej stojí vždy matematik, ktorý prichádza s myšlienkou, princípom, algoritmom. V neposlednom rade je tu informatik, ktorý ideu či nápad matematika adekvátne *preloží do jazyka počítača a naučí ho realizovať* potrebné výpočty.

Informatizácia vyučovania matematiky je ovplyvnená vo veľkej miere schopnosťou učiteľa identifikovať a postihnúť správny moment na zapojenie a použitie počítačových technológií pri riešení matematických problémov. Musí vedieť správne rozlíšiť, ktoré témy je vhodné vyučovať s podporou IKT, kedy využiť možnosť vykonať rýchlo rutinné a zdĺhavé výpočty či precíznu vizualizáciu matematických pojmov pomocou počítača, kedy realizovať precvičovanie a upevňovanie učiva prostredníctvom počítačových technológií.

V tomto článku chceme naznačiť ako môžeme motivovať študentov pri vyučovaní matematiky aj tým, že im priblížime vzájomnú symbiózu matematiky a informatiky pri riešení matematických rekurentných problémov. Akcentujeme recipročné spojenie informatického a matematického vzdelávania a predstavíme študentom podstatu realizácie výpočtu druhej a vyššej odmocniny racionálneho čísla pomocou Herónovej metódy; t. j. odpovieme im na otázku *ako vlastne vykonáva tieto výpočty počítač*.

## 2 Ako počíta počítač?

Oblasť riešenia rôznych rekurentných matematických problémov je spoločnou platformou matematiky a informatiky. Pri rekurentných predpisoch v matematike určujeme neznámu veličinu pomocou už známych predchádzajúcich veličín a pevne stanovenej formuly. Majoritná väčšina operácií (výpočtov) v počítači je realizovaná buď rekurzívnymi alebo iteračnými aproximačnými algoritmi, ktorých princíp vychádza z numerických a približných matematických metód. Inak tomu nie je ani pri realizácii výpočtu druhej, tretej alebo vyššej odmocniny čísla.

Navrhovaný scenár vyučovacej hodiny umožní študentom aktívne participovať pri odhaľovaní metódy, ktorú využívajú počítače pri výpočte druhej odmocniny z kladného racionálneho čísla. (Uvádzaná metóda nie je jedinou známou numerickou metódou pre výpočet odmocniny z čísla, známejšou je Newton-Rapsonova metóda tiež využívaná pri realizácii rôznych výpočtov v počítači). Študenti tak dostanú odpoveď na otázku: *ako to vlastne vypočíta počítač*. Ako učitelia matematiky sme často atakovaní práve otázkami študentov typu: *načo sa to máme učiť, keď to už dokáže za nás urobiť počítač*. Ukázať žiakom, na akom matematickom princípe počítač vykonáva niektoré výpočty môže byť pre študentov veľmi inšpirujúce a motivujúce.

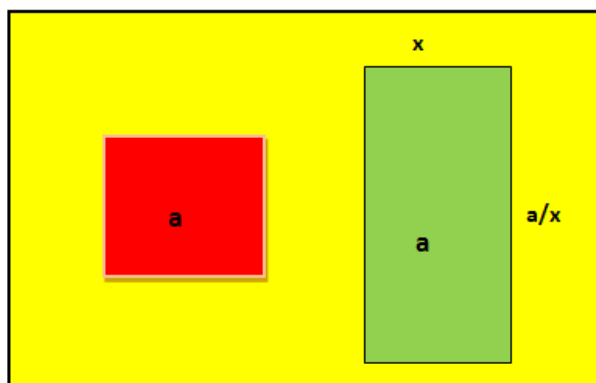
Výpočet druhej, tretej či  $n$  – tej odmocniny čísla dnes študenti najčastejšie realizujú pomocou kalkulačky alebo počítača, použitím napríklad funkcií SQRT() alebo POWER(). V článku predstavíme jeden z najstarších algoritmov tzv. *Babylonský* (alebo tiež nazývaný *Herónov algoritmus*), pre výpočet druhej odmocniny čísla. Naším nástrojom a asistentom z oblasti IKT bude tabuľkový procesor MS Excel, ktorý je ideálnym prostriedkom pre vytváranie adekvátnych numerických, dynamických a flexibilných modelov matematických pojmov.

Postup následne zovšeobecníme aj pre výpočet vyšších odmocnín čísla.

### 2.1 Herónov algoritmus

Najskôr vysvetlíme podstatu Herónovho algoritmu, známeho už zo staroveku, ktorý má dodnes obrovský praktický význam. Umožníme študentom vniknúť do filozofie algoritmu a následne realizujeme aktivitu zameranú na odhalenie algoritmu pre vyššie odmocniny z čísla  $a$ .

Ideu algoritmu môžeme geometricky interpretovať takto: Úlohu vypočítať druhú odmocninu z kladného čísla  $a$  môžeme vnímať ako problém nájsť veľkosť strany štvorca  $x$ , ktorého obsah sa rovná číslu  $a$ . viď obr.1.



Obr.1: Grafická interpretácia myšlienky Herónovho algoritmu

Dané je kladné číslo  $a$ . Začneme výberom ľubovoľného kladného čísla  $x$ , ktoré považujeme za počiatočné priblíženie (hrubý odhad) druhej odmocniny čísla  $a$ . Ak je hrubý odhad čísla  $x$  menší ako hľadaná presná hodnota  $\sqrt{a}$  konštruujeme obdĺžnik s dĺžkou strany  $x$  a obsahom  $a$ , potom dĺžka jeho druhej strany  $a/x$  bude väčšia ako hľadaná hodnota  $\sqrt{a}$ . Ak je naopak zvolený hrubý odhad čísla  $x$  väčší ako presná hodnotu druhej odmocniny z čísla  $a$ , potom bude hodnota  $a/x$  menšia ako hľadaná hodnota  $\sqrt{a}$ . Môžeme preto za ďalšie priblíženie - novú hodnotu  $x$  zobrať aritmetický priemer hodnôt  $x$  a  $a/x$ . Algoritmus zapíšeme takto.

1. Začneme výberom ľubovoľnej kladnej počiatočnej hodnoty  $x_0$  (čím bližšie k skutočnej hodnote druhej odmocniny čísla  $a$  tým lepšie).
2. Nech  $x_{n+1}$  je hodnota aritmetického priemeru čísel  $x_n$  a  $a/x_n$ .
3. Opakujeme krok 2, kým nedosiahneme požadovanú presnosť koreňa  $\sqrt{a}$ .

Rekurentná formula pre výpočet druhej odmocniny z čísla  $a$  má potom tvar

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad (1)$$

$$\sqrt{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

**Poznámka.** Ak je  $x_0$  príliš vzdialené od hodnoty  $\sqrt{a}$ , potom postupnosť priblížení  $\{x_n\}$  konverguje veľmi pomaly. Efektívne je preto voliť hrubý počiatočný odhad  $x_0$  odmocniny  $\sqrt{a}$  takto:

Ak  $a \geq 1$ ,  $D$  je počet cifier čísla  $a$  naľavo od desatinnej čiarky. Ak  $a < 1$ ,  $D$  je počet cifier čísla  $a$  napravo od desatinnej čiarky. Potom

$D$  je nepárne  $D = 2n+1$  a  $x_0 = \sqrt{a} \approx 2 \cdot 10^n$

$D$  je párne  $D = 2n$  a  $x_0 = \sqrt{a} \approx 6 \cdot 10^n$

## 2.2 Realizácia Herónovho algoritmu v MS Exceli

MS Excel je vhodným nástrojom pre vytváranie a realizáciu rôznych rekurzívnych algoritmov a dynamických modelov matematických pojmov. Tabuľky v Exceli sa automaticky aktualizujú po každej zmene ľubovoľnej vstupnej hodnoty. Táto ich flexibilita umožňuje modifikovať riešené úlohy a vytvárať bez problémov veľké množstvo konkrétnych modelov matematických pojmov.

Prehľadná, vkusná, estetická úprava tabuliek a využitie rozmanitých grafov prispieva k lepšej vizualizácii a zrozumiteľnosti výkladu. MS Excel má tiež zabudované veľké množstvo matematických, logických a štatistických funkcií. Študenti môžu aktívne vytvárať (nie len pasívne využívať), testovať a doladovať rôzne algoritmy, osvojovať si poznatky prostredníctvom činnosti, rozvíjať operatívne a algoritmické myslenie.

Pri realizácii prezentovanej aktivity odporúčame využiť problémovú vyučovaciu metódu - študenti navrhujú štruktúru rekurentnej formuly, pričom je možná okamžitá spätná väzba, prezentácia výsledkov pomocou dataprojektora, rozvíjanie heuristickej besedy. Počítačové technológie poskytujú rýchlo a flexibilne potrebné výsledky inak pomerne komplikovaných výpočtov. Študentom tak zostáva viac priestoru na to najpodstatnejšie: reflexívnu analýzu získaných výsledkov, kreovanie nových nápadov.

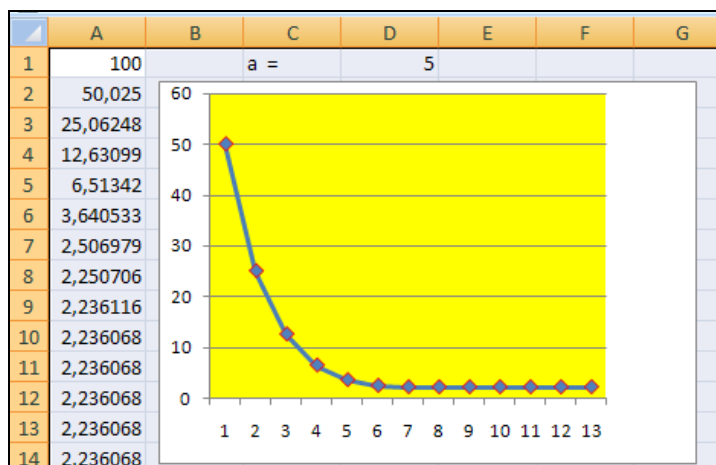
Realizácia Herónovho algoritmu v MS Exceli spočíva v nasledujúcom.

Do bunky C1 zapíšeme kladné číslo  $a$ , ktorého druhú odmocninu chceme vypočítať.

Do bunky B1 môžeme vložiť vhodný komentár. Počiatočnú hodnotu druhej odmocniny čísla  $a$  (hrubý odhad, prvé priblíženie) vpíšme do bunky A1.

Do bunky A2 vkladáme formulu (1) pre výpočet druhej odmocniny čísla  $a$  v tvare  $=(A1+a/A1)/2$ . Formulu treba skopírovať smerom nadol v stĺpci buniek A počnúc od bunky A3 povedzme po A15. Pri kopírovaní smerom dolu sa riadkové indexy A1 modifikujú.

Obrázok 2 reprezentuje realizáciu algoritmu Heróna v MS Exceli pre  $a = 5$



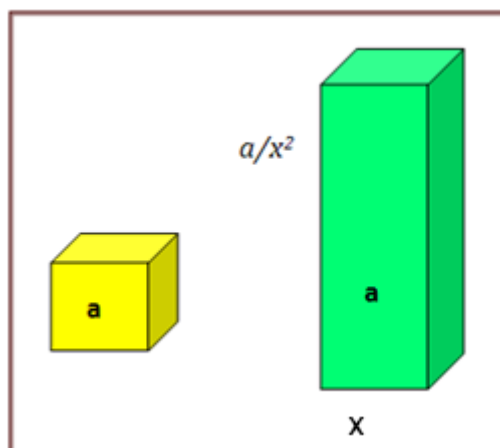
Obr.2: Realizácia Herónovho algoritmu pre  $a = 5$  v MS Exceli

Registrujeme ako pomerne rýchlo konverguje postupnosť priblížení k hodnote  $\sqrt{5} = 2,236068$

### 2.3 Výpočet tretej a vyššej odmocniny z čísla rekurentnou metódou

Rekurentnú metódu postupných priblížení vychádzajúcu z myšlienky Heróna môžeme použiť aj pre výpočet tretej, štvrtej či  $n$ -tej odmocniny ( $n \in \mathbb{N}$ ) z čísla  $a$ . Stačí ak uvedený princíp zovšeobecníme a realizujeme so zreteľom na stupeň odmocniny.

Výpočet tretej odmocniny čísla  $a$  interpretujeme geometricky ako problém určiť dĺžku hrany kocky  $x$ , ktorej objem sa rovná číslu  $a$ ; vid' obrázok 3.

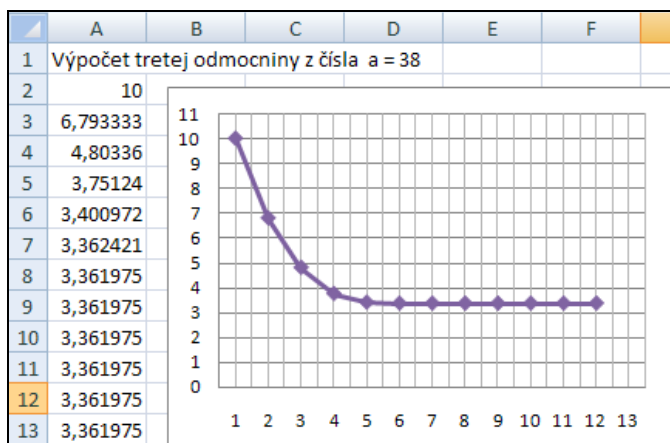


Obr.3: Grafická interpretácia formuly (2)

Proces výpočtu začneme opäť výberom vhodnej počiatočnej aproximácie  $x_0$  tretej odmocniny čísla  $a$ . Rekurentná formula bude mať potom tvar (uvažujeme analogicky ako v predchádzajúcom)

$$x_{n+1} = \left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right) / 3 \quad (2)$$

V Excelovskom zošite vytvoríme tabuľku pre výpočet tretej odmocniny čísla  $a$  s využitím formuly (2) obdobne ako pri výpočte  $\sqrt{a}$  a získame napríklad tieto výsledky pre  $a = 38$



Obr.4: Výpočet tretej odmocniny z čísla 38 pomocou formuly (2)

Pri hľadaní vyššie uvedenej formuly (2) využijeme opäť problémovú metódu, heuristickú besedu, spoločné analyzovanie a verifikáciu proponovaných návrhov. V tabuľkovom procesore MS Exceli vytvoríme tabuľku, v ktorej bude možné empiricky porovnávať návrhy študentov, výsledky získané výpočtom podľa navrhovaných formúl a identifikovať správne riešenie.

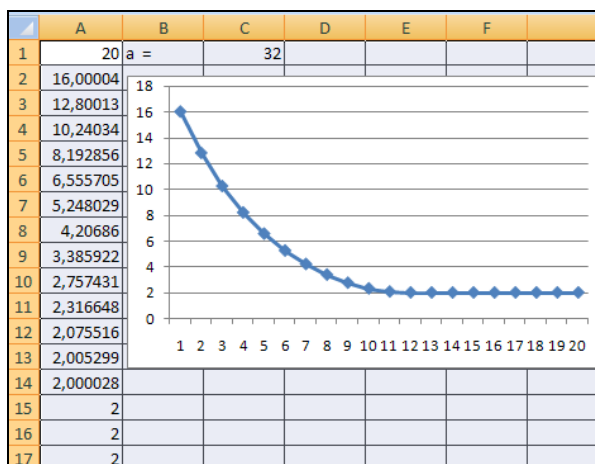
Najatraktívnejšou časťou aktivity môže byť využitie poznatkov z predchádzajúcich cvičení a ich zovšeobecnenie pre výpočet piatej odmocniny čísla **a**. Odporúčame preto riešiť nasledujúcu úlohu.

**Úloha.** Navrhňte metódu rýchleho výpočtu piatej odmocniny čísla **a**. Otestujte efektivitu tejto metódy pomocou tabuľkového procesora MS Excelu.

**Riešenie.** Hľadaná rekurentná formula bude mať tvar

$$x_{n+1} = (4x_n + \frac{a}{x_n^4}) / 5 \quad (3)$$

Realizáciou rekurzívneho algoritmu vytvoreného podľa formuly (3) v MS Exceli pre  $a = 32$  dospejeme pomerne rýchlo k riešeniu vid' obr.4. Testovaním rôznych vstupných hodnôt zisťujeme, že formulu (3) môžeme použiť úspešne pre výpočet piatej odmocniny z ľubovoľného racionálneho čísla.



Obr.5: Výpočet piatej odmocniny čísla 32 s využitím rekurentnej formuly (3)

### 3 Záver

Existuje veľa ciest ako využívať počítačové technológie pri vyučovaní matematiky, dobré aj zlé. Zlé, alebo lepšie povedané nevhodné prístupy často prichádzajú od technických nadšencov z radov učiteľov, ktorí používajú počítačové technológie už len preto, že existujú, a že je teda možné ich istým spôsobom použiť. Ak siahame pri vyučovaní matematiky po počítačových technológiách mal by nám byť vždy predtým jasný pedagogický cieľ, ktorý tým sledujeme. Najvhodnejšie je, ak sa stanú takým nástrojom a asistentom vo vyučovacom procese, vďaka ktorému môžeme na hodine matematiky vykonávať menej rutinných a stereotypných operácií ale zato viac priestoru zostane pre precízne zdôvodňovanie a odhaľovanie podstaty matematických pojmov. O tom, že matematika a informatika sú ako dve spojené nádoby už dnes nikto nepochybuje. Existenciu jednej bez druhej si už nevieme ani predstaviť. Je len na nás, ako dokážeme využiť túto ich vzájomnú symbiózu pre skvalitnenie a zatriktívnenie vyučovania matematiky.

Príspevok vznikol s podporou grantového projektu KEGA: 3/6021 /09.

### Literatúra

- [1] Bačová, B.: Computer technology in mathematics education. In: XXVI. international colloquium on the management of educational process. UO Brno 2008.
- [2] Žilková, K.: Školská matematika v prostredí IKT. UK Bratislava 2008. ISBN 978-80-223 2555-4.
- [3] Walata, A.: Technologia informacyjna. Oficyna Edukacyjna. Warszawa 2002. ISBN 83 - 89023 - 64 - 4.

### Kontaktná adresa

doc. PaedDr. Tomáš Lengyelfalusy, CSc.  
Katedra matematiky, FPV ŽU  
Univerzitná 1, 010 26 Žilina  
[tomas.lengyelfalusy@fpv.uniza.sk](mailto:tomas.lengyelfalusy@fpv.uniza.sk)

PaedDr. Lýdia Kontrová, PhD.  
Katedra matematiky, FPV ŽU  
Univerzitná 1, 010 26 Žilina  
[lydia.kontrova@fpv.uniza.sk](mailto:lydia.kontrova@fpv.uniza.sk)