Parabola v aplikačných príkladoch a ich aplety v programe GeoGebra

Parabola in Applications and its Applets in Software Geogebra

Dušan Vallo – Viliam Ďuriš – Júlia Záhorská

Abstract

In this paper, we focus on simple application examples. We choose examples, where the synthesis of knowledge of geometry and mathematical analysis is evident. It is clear that the examples are of motivating nature and they are offered as an inspirational source.

Keywords

Software GeoGebra, application, parabola

1 Úvod

V príspevku sa sústredíme na jednoduché aplikačné príklady, ktoré sú riešené na seminároch a cvičeniach z predmetov Geometria 3 a 4 učiteľstva akademických predmetov v aprobácii s matematikou na FPV UKF v Nitre. Ide o aplikačné úlohy, v ktorých vystupuje len jedna množina bodov danej vlastnosti – parabola. Pri výbere príkladov sme kládli dôraz na také úlohy, kde je možná syntéza poznatkov geometrie a matematickej analýzy, keď v istých príkladoch hľadáme extrém. Je zrejmé, že uvedené príklady majú motivačný charakter a prezentujú len zlomok z učebnej látky. Ponúkame ich však čitateľovi ako inšpiratívny zdroj.

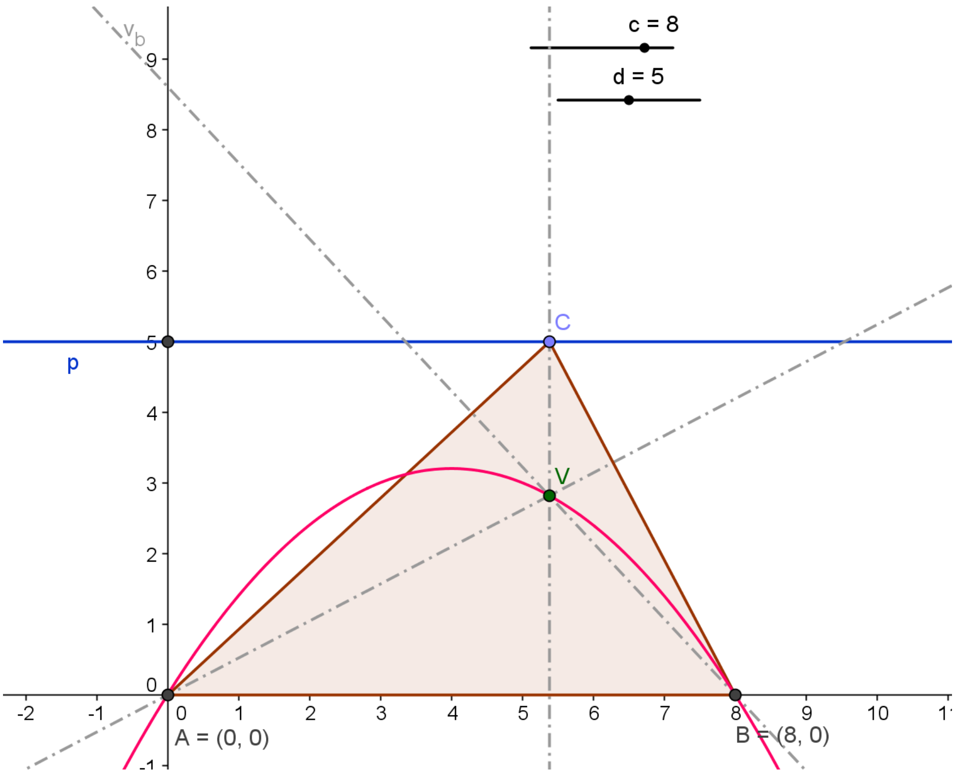
2 Parabola

Ako sme už uviedli, zamerali sme sa na kužeľosečku – parabolu. Predpokladáme, že čitateľovi sú jasné základné pojmy súvisiace s touto množinou bodov danej vlastnosti, ako aj jej analytické rovnice. Poznamenávame, že v učive na strednej školy sa mierne zanedbáva poznatok o optických vlastnostiach kužeľosečiek, resp. odpovedajúcich rotačných plôch. Za tým účelom pripomínane, že parabolická rotačná plocha je jediná plocha tej vlastnosti, že lúč prechádzajúci jej ohniskom sa od plochy odráža rovnobežne s osou plochy. Tento poznatok využijeme neskôr.

Príklad 1

Priamka p leží rovnobežne s úsečkou AB dĺžky c vo vzdialenosti d. Určte množinu bodov, do ktorej patrí ortocentrum trojuholníka ABC, ak C je ľubovoľný bod priamky p.

Riešenie. Pomocou programu vytvoríme aplet. Parametrami budú premenné *c* a *d.*



Obr. 1 [Aplet k príkladu 1]

Zvolíme súradnicovú sústavu *Oxy* tak, aby *O* ≡ *A[0, 0]*, *B[c, 0]*. Potom *C[x, d]* a *V[x, y]*. Keďže vektory $\overrightarrow{AV}, \overrightarrow{BC}$ sú na seba kolmé (V je ortocentrum), pre skalárny súčin platí $\overrightarrow{AV}.\overrightarrow{BC} = 0$.

Počítame $\overrightarrow{AV}.\overrightarrow{BC} = (x, y)(x - c, d) = 0$.

Odtiaľ dostaneme, že ide o parabolu so stredovou rovnicou $\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 = -d\left(y - \frac{c^2}{4d}\right)$, ktorej vrchol má súradnice $\left[\frac{c}{2}, \frac{c^2}{4d}\right]$.

Poznámka. Aplet je výhodné použiť pri diskusii, či musí byť vrchol paraboly prvkom trojuholníka.

Príklad 2

Ako vysoko a ako ďaleko by doletela strela odpálená rýchlosťou v_0 s elevačným uhlom α? Odpor vzduchu neuvažujte.

Riešenie. Vektor rýchlosti $\vec{v}$ rozložíme do dvoch zložiek – vodorovnej $\overrightarrow{v_x}$ a zvislej $\overrightarrow{v_y}$. Ak položíme súradnicový systém tak, že počiatok je miestom výstrelu, potom platí $v_x = v_0.\cos\alpha$ a $v_y = v_0.\sin\alpha$. Za čas t preletí strela dráhu $v_0 t$, ktorá sa opäť rozloží do dvoch zložiek $v_x.t$ a $v_y.t - \frac{1}{2}gt^2$, pretože na strelu pôsobí gravitačná sila a $\frac{1}{2}gt^2$ je dráha voľného pádu pri gravitačnom zrýchlení $g \approx 10 m.s^{-2}$. V čase t sa strela nachádza v bode *M[x, y]*, ktorého súradnice sú $x = v_0 t.\cos\alpha$, $y = v_0 t.\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$. Z rovnice $x = v_0 t.\cos\alpha$ dostaneme $\frac{x}{v_0.\cos\alpha} = t$ a v druhej rovnici eliminujeme parameter t.

Výsledná rovnica je stredovou rovnicou paraboly

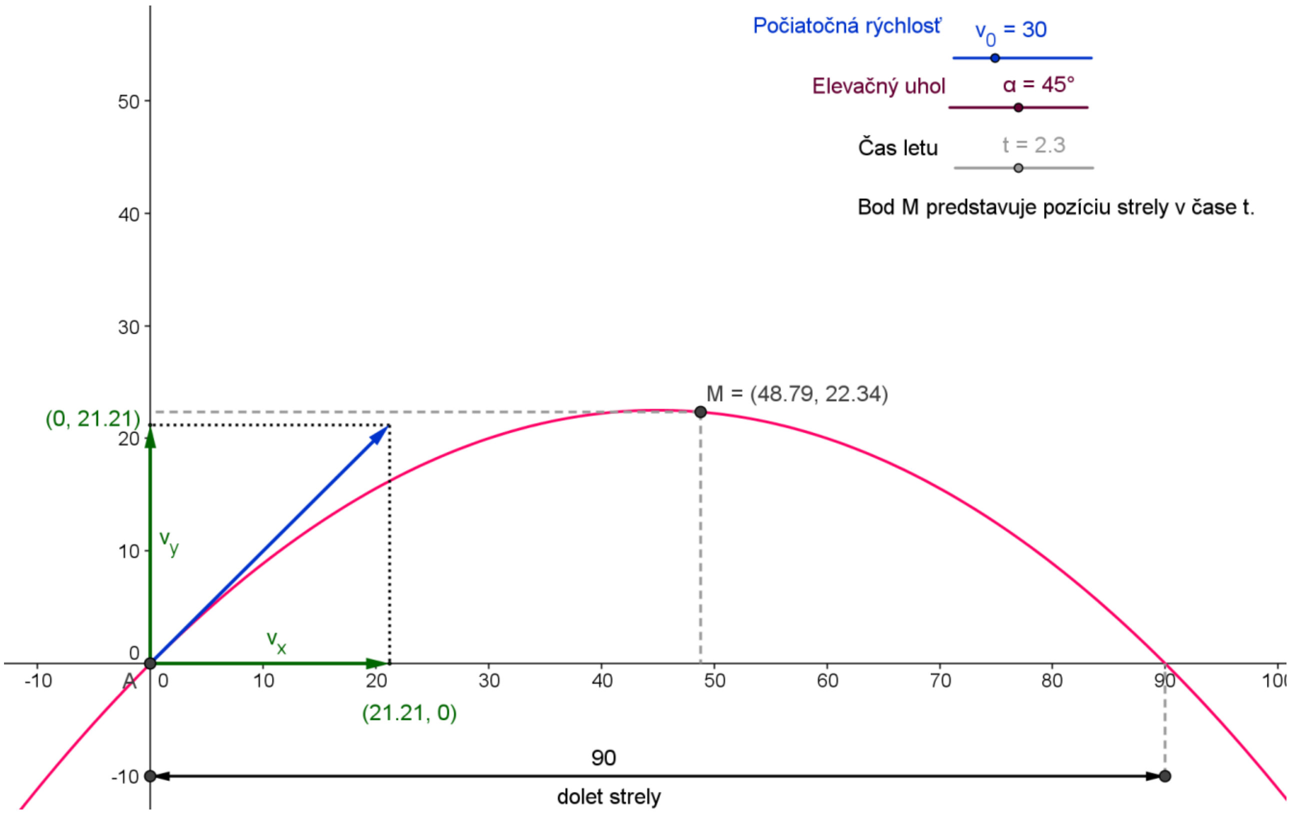
$$\left(x - \frac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha\right)^2 = -2\frac{v_0^2}{g}\cos^2\alpha\left(y - \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha\right)$$

V aplete je možné nadstaviť premenné $\overrightarrow{v_0}$ a veľkosť uhla α.

Problematiku tohto príkladu možno rozšíriť aj na oblasť projektového vyučovania.

Pre študentov bude možno zaujímavé riešiť problémy, kde

1. ide o veľkosť uhla pri maximálnom dolete strely, resp. v akom čase je strela v maximálnej výške
2. úlohy praktického charakteru, kde sa počíta elevačný uhol tak, aby strela dopadla na cieľ v istej nadmorskej výške alebo vzdialenosti od miesta výstrelu - z hľadiska geometrického ide o riešenie úloh o vzájomnej polohe priamky a kužeľosečky.



Obr. 2 [*Aplet k príkladu 2*]

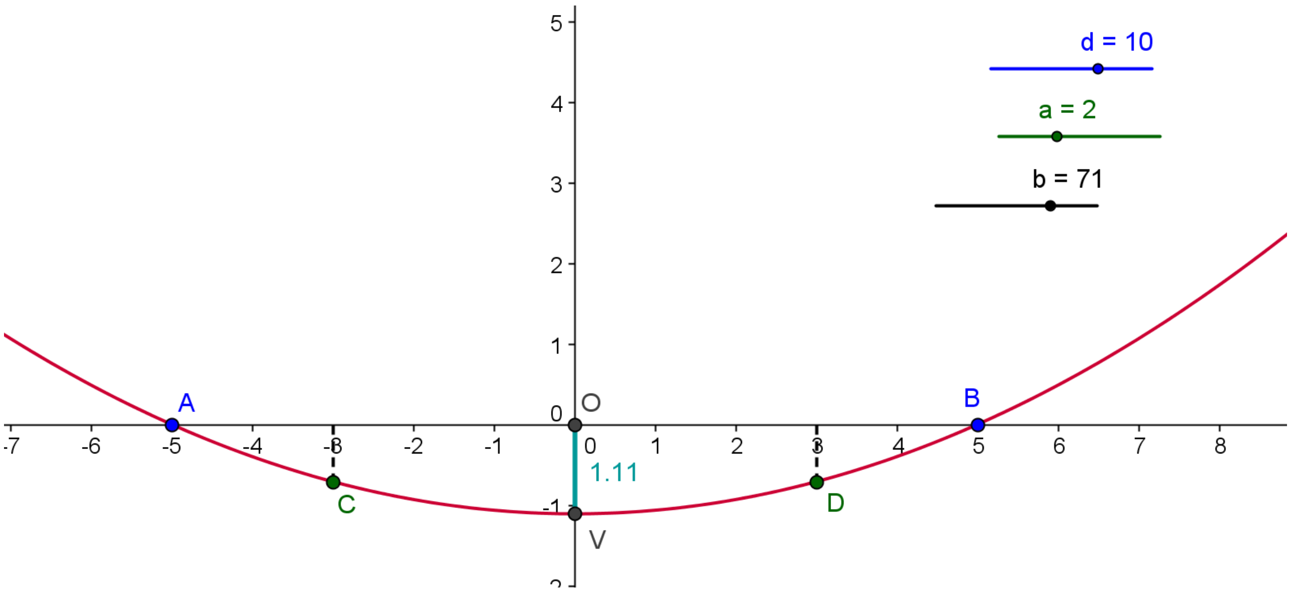
Príklad 3

Oceľový trám dĺžky d *metrov je zavesený v krajných bodoch tak, že* a *metrov od bodov upevnenia je prehyb* b *centimetrov. Vlastnou tiažou je trám parabolicky prehnutý. Zistite prehyb* u *v strede trámu.*

Riešenie. Umiestnime trám modelovaný úsečkou do karteziánskej súradnicovej sústavy tak, aby krajné body $A\left[-\frac{d}{2},0\right]$, $B\left[\frac{d}{2},0\right]$. Body daného prehybu budú $C\left[-\frac{d}{2}+a,\frac{b}{100}\right]$, $D\left[\frac{d}{2}-a,\frac{b}{100}\right]$. Vzhľadom k umiestneniu úsečky, je parabola súčasne aj funkciou so rovnicou $y = ex^2 + f$, kde $e, f \in R$. Dosadením súradníc bodov A, C do rovnice, odvodíme

$$y - \frac{bd^2}{400a\ a-d} = \frac{b}{a\ a-d} \cdot x^2$$

Vrchol paraboly je $V\left[0,\frac{bd^2}{400a\ a-d}\right]$ a preto prehyb v strede má hodnotu $u = \left|\frac{bd^2}{400a\ a-d}\right|$.



Obr. 3 [*Aplet k príkladu 3*]

Príklad 4

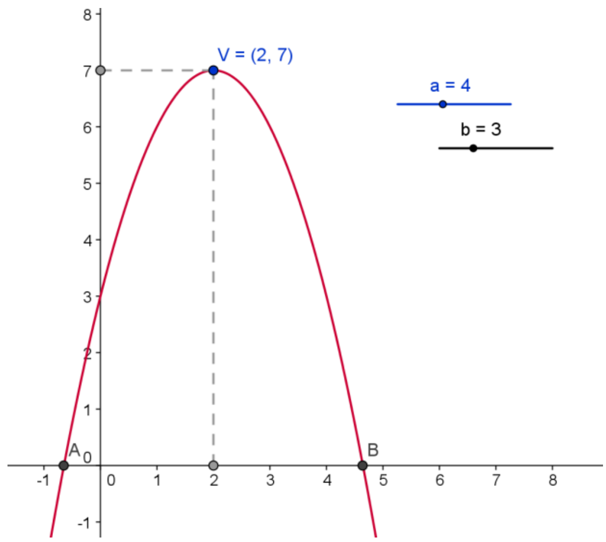
Približný počet ton pomarančov vzatých z plantáže je daný funkciou y = x(a-x)+b, kde x *predstavuje počet pomarančovníkov na* 1 *hektári a* $a, b \in R$ *. Zistite, koľko stromov treba vysadiť na* 1 *hektár, aby bol maximálny výnos.*

Riešenie. Keďže funkcia je parabolou, extrém určuje je vrchol. Upravíme funkciu do tvaru

$$y - \left(\frac{a^2 + 4b}{4} \right) = -\left(x - \frac{a}{2} \right)^2$$

Maximálna hustota výsadby plantáže bude pre $x = \frac{a}{2}$, kedy bude výnos $y = \frac{a^2 + 4b}{4}$.

Pomocou apletu môžeme vymodelovať konkrétne hodnoty výnosov.

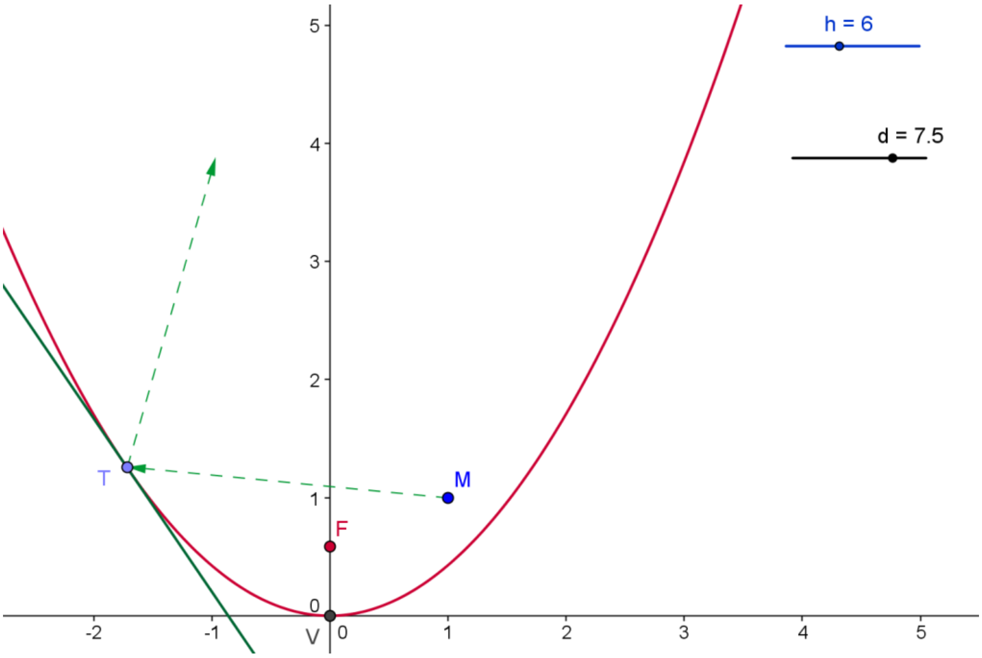


Obr. 4 [*Aplet k príkladu 4*]

Príklad 5

Automobilový reflektor má tvar rotačného paraboloidu s výškou h*. Vo výške* h *je jeho rezom kružnica s priemerom* d*. Určte vzdialenosť vlákna žiarovky od jeho vrcholu tak, aby svetelné lúče smerovali rovnobežne s jeho osou.*

Riešenie. Rezom rotačného paraboloidu s rovinou, ktorá prechádza jeho osou , je parabola. Umiestnime parabolu do súradnicovej sústavy tak, aby jej rovnica bola $y = ax^2, a \in R$. Vzhľadom k zadaným hodnotám platí, že parabola prechádza bodmi $A\left[-\frac{d}{2}, h\right]$, $B\left[\frac{d}{2}, h\right]$. Konkrétna rovnica paraboly je potom $y = 4\frac{h}{d^2}x^2$. Podľa požiadavky na smer svetelných lúčov musí byť vlákno žiarovky umiestnené v ohnisku F paraboly, pre ktoré platí $|VF| = \frac{p}{2} = \frac{h}{d^2}$ (vychádzame zo vrcholovej rovnice $y - n = 2p(x-m)^2$, kde $V[m, n]$). Ohnisko má teda súradnice $F\left[0, \frac{h}{d^2}\right]$.



Obr. 5 [Aplet k príkladu 5]

V aplete možno modelovať rôzne situácie. Odporúčame umiestniť bod *M* ako zdroj svetelného lúča do bodu *F* a meniť pozíciu bodu *T*. Odrazený svetelný lúč smeruje vždy rovnobežne s osou paraboly – osou *y*.

3 Záver

V článku sme v krátkosti prezentovali vybrané aplikačné úlohy, pričom sme sa sústredili výhradne na jednu kužeľosečku - parabolu. Riešenia sme doplnili o odpovedajúce aplety, kde sme všeobecné parametrické riešenie realizovali na konkrétnych vstupných hodnotách.

Literatúra

[1] Drábeková, J. – Rumanová, L.: *Využitie didaktických softvérov v niektorých častiach matematiky.* Nitra. In: Medzinárodné vedecké dni 2008 - zborník recenzovaných príspevkov z medzinárodnej vedeckej konferencie. SPU Nitra 2008, s. 1231-1235. ISBN 978-80-552-0061-3

[2] Žilková, K.: *Školská matematika v prostredí IKT*. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 2008. ISBN 978-80-223-2555-4

[3] Csiba, P.: *Voľne síriteľné geometrické softvéry*. Zborník konferencie: 5. medzinárodná konferencia Aplimat, STU, 2006, s. 47-54.ISBN 80-967305-5-X

[4] Pavlovičová, G. - Rumanová, L.: *Rozvoj priestorovej predstavivosti s využitím Cabri 3D*. Bratislava: In. E-matik 2007 : *E-learning v matematike, matematika v E-learningu*, Bratislava - Slovakia, September 10-12, 2007. - Bratislava: UK, 2007. - nestr.

[5] Žilková, K. : *Nástrahy Cabri geometrie II.* In: Acta 2004 – Zborník Pedagogickej fakulty Trnavskej univerzity. Trnava: PF TU, 2004, ISBN 80-8082-014-7.

[6] Vidermanová, K.: *Výučba stereometrie a rozvoj priestorovej predstavivosti pomocou počítačových programov* . In: Informačné a komunikačné prostriedky vo vzdelávaní v matematike. Nitra: FPV UKF, Prírodovedec č. 199, 2005.ISBN 80-8050-925-5- S.

[7] Csiba, P.: *Nové aspekty a možnosti vo vyučovaní matematiky,* In: Zborník príspevkov 1. vedeckej konferencie s medzinárodnou účasťou, Trenčín, s. 58-63.ISBN 978-80-8075-347-4.

[8] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky, SPN, Praha, 2.vyd., s. 628, 1977

Kontaktná adresa

RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Katedra matematiky
FPV UKF v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
dvallo@ukf.sk

RNDr. Viliam Ďuriš, PhD.
Katedra matematiky
FPV UKF v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
vduris@ukf.sk

PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.
Katedra matematiky
FPV UKF v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
jzahorska@ukf.sk