Neštandardné úlohy o sieťach konvexných mnohostenov riešené s podporou Cabri 3D

Non-standard Tasks on Convex Polyhedra Nets solved using Cabri 3D

Edita Vranková

Abstract

We present, in first, some fundamental properties and theorems on convex polyhedra and their nets. The main goal is presenting some ideas how to solve non-standard tasks on nets convex polyhedra by implementation of the ICT using dynamic geometric program Cabri 3D. There are solved two tasks using Cabri 3D and they are complemented with two tasks for homework.

Keywords

Convex polyhedra, nets, non-standard tasks, geometric imagination, constructive approach, Cabri 3D.

1 Úvod

V súčasnosti, v dôsledku intenzívneho používania počítačov možno vidieť, že sa význam geometrického modelovania, tvorby „hmatateľných“ modelov celkom nedoceňuje. Napriek tomu, že didaktické geometrické programy využívané pri výučbe stereometrie, ako napr. už známy dynamický interaktívny program Cabri 3D (pozri aj [4], [5]), sa postupne stávajú nevyhnutnými podpornými prostriedkami vnášajúcimi do výučby geometrie dynamickosť, interaktívnosť a virtuálnu realitu, sú tu dva činitele, ktoré hovoria stále v prospech „klasických“ modelov. Po prvé, obrazovka počítača nenahradí **hmatovú skúsenosť** žiakov, čo je dôležité hlavne na základnej škole, t. j. možnosť **uchopenia modelu** a ručnej **manipulácie** s ním, teda skúsenosť. Po druhé, čo je možno ešte dôležitejšie ako používanie hotových modelov, je ich **vlastné vytváranie** - vlastný zážitok. Z diaktického hľadiska manipulácia s hotovými modelmi by mala predchádzať ich vlastnej tvorbe a potom by mala nasledovať práca s virtuálnymi modelmi.

Medzi **štandardné** stereometrické **úlohy** pre žiakov základnej školy aj pre študentov strednej školy patria určite úlohy na **zostrojovanie sietí** a **modelov** konvexných **hranolov a ihlanov**. **Tvorba** modelov (z ktorých najrozšírenejšie sú zrejme **papierové**) je prirodzenou súčasťou, ktorá vhodným spôsobom motivuje, precvičuje presnosť, vyžaduje riešenie planimetrických úloh, rozvíja priestorovú predstavivosť, konštrukčné myslenie a napokon, pomáha správne pochopiť učivo o hraniciach a povrchoch telies.

Hlavným cieľom článku je ukázať prostredníctvom riešenia vybraných **neštandardných úloh** o sieťach konvexných mnohostenov, **obrátených** k štandardným úlohám (týkajúcich sa zostrojovania sietí k daným konvexným mnohostenom), že do učiva stredoškolskej stereometrie možno zaradiť bez obáv aj takéto úlohy. Ide v nich o zisťovanie a **rozhodnutie**, **či** daný mnohouholník, resp. **zoskupenie mnohouholníkov v rovine je sieťou nejakého konvexného mnohostena** a ak áno, tak aj vytvorenie jeho papierového modelu. A prečo práve mnohostenov? Počiatky samotnej teórie mnohostenov siahajú totiž k počiatkom geometrických poznatkov vôbec. Prírodné kryštály, schránky morských živočíchov a mnohé vírusy majú tvar pravidelných (konvexných) mnohostenov, existujú stavby v tvare mnohostenov (resp. ich častí), futbalová lopta je tiež konvexný mnohosten, atď.

Súčasťou riešenia úloh o sieťach konvexných mnohostenov by malo byť ich zobrazenie v rovine. Zostrojiť obraz ľubovoľného konvexného mnohostena nemusí byť však vôbec jednoduché a názorné alebo daná úroveň poznatkov nestačí na ich zobrazenie v rovine. Tu sa ukazuje ako veľmi užitočný podporný prostriedok práve didaktický program Cabri 3D.

Riešenie úloh, najmä neštandardných a s podporou Cabri 3D, pomáha budovať a rozvíjať geometrické predstavy a geometrické myslenie žiakov, resp. študentov: geometrickú terminológiu, priestorovú a geometrickú predstavivosť, matematický jazyk, kritické myslenie, samostatnosť, schopnosť vidieť súvislosti, objavovanie atď., čo vedie k tvorbe a budovaniu vlastného systému poznatkov a vedomostí. To znamená, realizovať konštruktivistický prístup k riešeniu úloh.

Všetky obrázky sú vytvorené pomocou programu Cabri 3D. Pre virtuálny náhľad na príslušné objekty a manipuláciu s nimi je potrebné mať nainštalovanú plnú, príp. trial alebo aspoň demo verziu programu. Po kliknutí na príslušný odkaz sa otvorí výkres v Cabri 3D s virtuálnym objektom.

2 Mnohosteny a ich siete

Najskôr pripomenieme pojem mnohostena, jeho určujúce prvky, základné vlastnosti a pojem siete mnohostena, pričom z dôkazov uvedieme len niektoré, prípadne odkážeme čitateľa na príslušnú literatúru (dôkazy nie sú teraz predmetom nášho záujmu). Hlavnú pozornosť budeme venovať konvexným mnohostenom a ich sieťam. Uvedieme len najnutnejšie vlastnosti potrebné k vyriešeniu úloh uvedených v kapitole 3 o neštandarných úlohách.

Mnohosten je teleso, ktorého hranica je zjednotením takých mnohouholníkov, že strana každého z nich je zároveň stranou susedného mnohouholníka a žiadne dva susedné mnohouholníky neležia v jednej rovine (a žiadne dve nesusedné sa nepretínajú) [3]. Hraničné mnohouholníky sa nazývajú *steny*, ich strany sú *hrany* a ich vrcholy sú *vrcholy* mnohostena. Vnútorné uhly stien hraničných mnohouholníkov (uhly hrán) s tým istým spoločným vrcholom sa nazývajú *hranové uhly* prislúchajúce danému vrcholu.

P o z n á m k a. Pojem mnohouholníka, a teda aj jeho vlastnosti považujeme za známe. Pojem telea chápeme intuitívne a ďalej sa budeme zaoberať len mnohostenmi. Susedné mnohouholníky mnohostena sú tie, ktoré majú spoločnú stranu, susedné vrcholy mnohostena sú krajné body jeho hrán.

Je zrejmé, že každý vrchol mnohostena je spoločný pre ten istý počet hrán aj stien, každá hrana je spoločná práve pre dve steny.

Ak má mnohosten práve *s* stien, *h* hrán a *v* vrcholov, môžeme hovoriť (v stereometrii) o *s*-stene (podobne ako v planimetrii o *n*-uholníku). Základné vzťahy medzi parametrami *s*, *h*, *v* sú vyjadrené nasledujúcimi nerovnosťami.

Tvrdenie 1 ([1, Úloha 3.5.1, str. 39 a 40]). Pre ľubovoľný mnohosten platí $3v \leq 2h$, resp. $3s \leq 2h$.
D o k á ž e m e prvú časť tvrdenia (druhú časť si môže analogicky čitateľ dokázať sám). Každý vrchol mnohostena je spoločným vrcholom aspoň troch hrán a každá hrana má práve dva vrcholy. Teda platí $\frac{3v}{2} \leq h$, z čoho hneď vyplýva nerovnosť $3v \leq 2h$.

Vedieť vytvoriť **papierový model** konvexného **mnohostena** predpokladá poznať potrebné vlastnosti daného mnohostena, jeho siete a vedieť zostrojiť **sieť**.

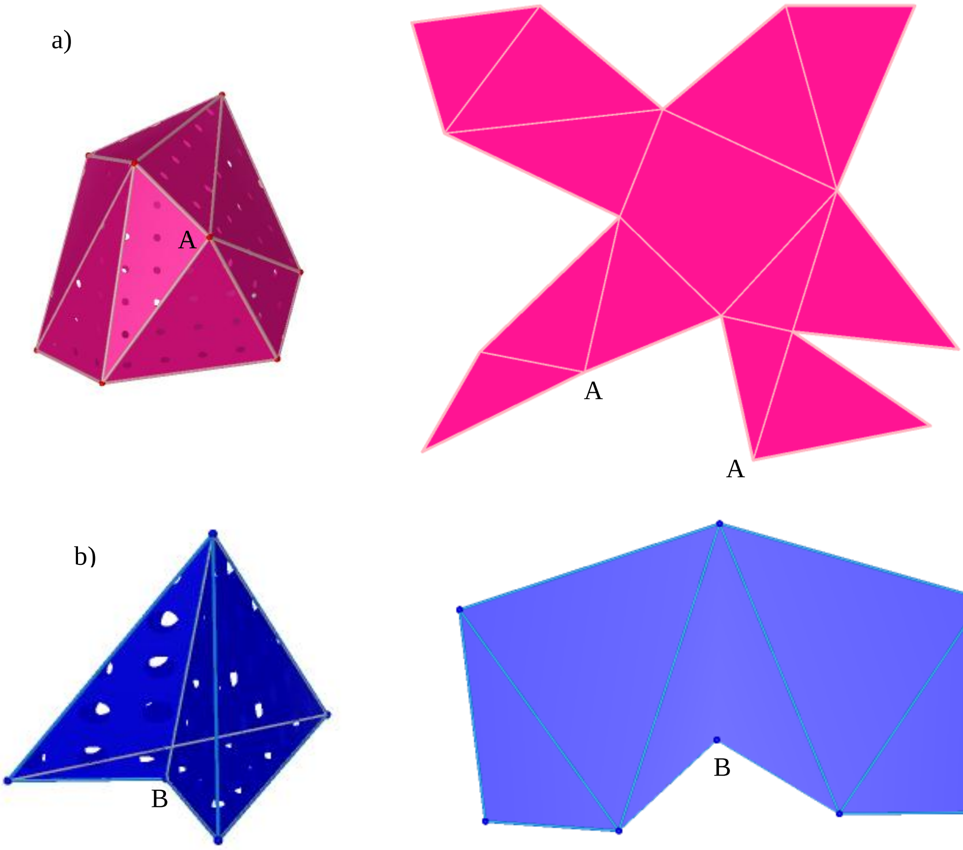
Sieť mnohostena je mnohouholník (vo všeobecnosti nekonvexný - ktorý nie je konvexný), ktorý je zjednotením mnohouholníkov zhodných so stenami mnohostena, rozložených v rovine tak, že ich opätovným zložením dostaneme hranicu mnohostena. Dotýkajúce sa hraničné mnohouholníky majú spoločnú celú stranu.

Rozložiť hranicu mnohostena do roviny je možné viacerými spôsobmi, ale len niektoré z nich budú jeho sieťami, a teda vhodnými na vytvorenie (papierového) modelu.

Zostrojenie modelu mnohostena má dva základné kroky:

- zostrojenie siete mnohostena,
- vhodné umiestnenie záložiek na zlepenie.

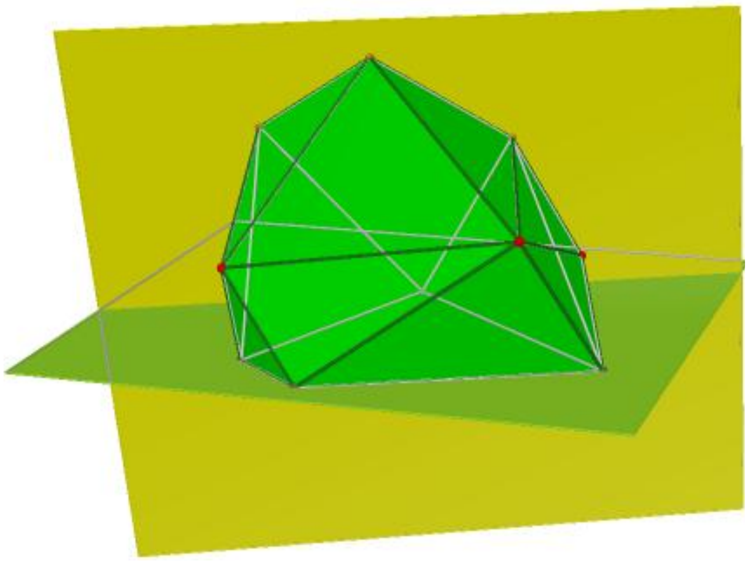
Dôležitou vlastnosťou je, že **ku každému mnohostenu môžeme zostrojiť vždy jeho sieť**. Inými slovami, ku každému mnohostenu existuje sieť. Nasledujúci obrázok 1ab ilustruje dve ukážky mnohostenov a ich sietí.



Obr. 1 a) b) Ukážky dvoch mnohostenov a ich sietí

2.1 Konvexné mnohosteny a ich siete

Konvexný mnohosten bude zrejme taký mnohosten, ktorý je konvexným (priestorovým) útvarom. Možno ho vytvoriť ako **prienik konečného počtu** určitých **polpriestorov**. Dôsledkom je, že mnohosten je konvexný, ak leží vždy práve v jednom z polpriestorov s hraničnou rovinou jeho steny a platí to pre každú stenu (obr. 2).



Obr. 2 Ukážka konvexného mnohostena

Konvexnosť mnohostena možno charakterizovať aj pomocou **hranových uhloch** prislúchajúcich k jednému vrcholu, presnejšie pomocou súčtu ich veľkostí. Táto vlastnosť bude užitočná aj pri zisťovaní, či k danému zoskupeniu mnohouholníkov (k danej sieti) existuje konvexný mnohosten.

Tvrdenie 3 ([1, str. 39])**.** V konvexnom mnohostene je súčet hranových uhlov prislúchajúcich k jednému vrcholu vždy menší než plný uhol. Inými slovami, súčet veľkostí hranových uhlov pri jednom vrchole je vždy menší než 360°. (Úloha: Po kliknití na odkaz nájdite na sieti vrchol A.)

Pre štvorsten, najjednoduchší konvexný mnohosten (všetky steny sú trojuholníky), **navyše** platí.

Tvrdenie 4 ([1, Úloha 3.1.5, str. 25]). Súčet ľubovoľných dvoch hranových uhlov prislúchajúcich ľubovoľnému vrcholu každého štvorstena je väčší ako tretí hranový uhol s tým istým vrcholom.
D ô k a z môže čitateľ nájsť v [2, str. 27]. (Úloha: Určte na sieti všetky vrcholy *A*, *B*, *C*, *D*.)

Medzi počtom stien, hrán a vrcholov **konvexného** mnohostena platí dôležitý vzťah (známy asi dvetisíc rokov), ktorý dostal pomenovanie po matematikovi, ktorý ho dokázal.

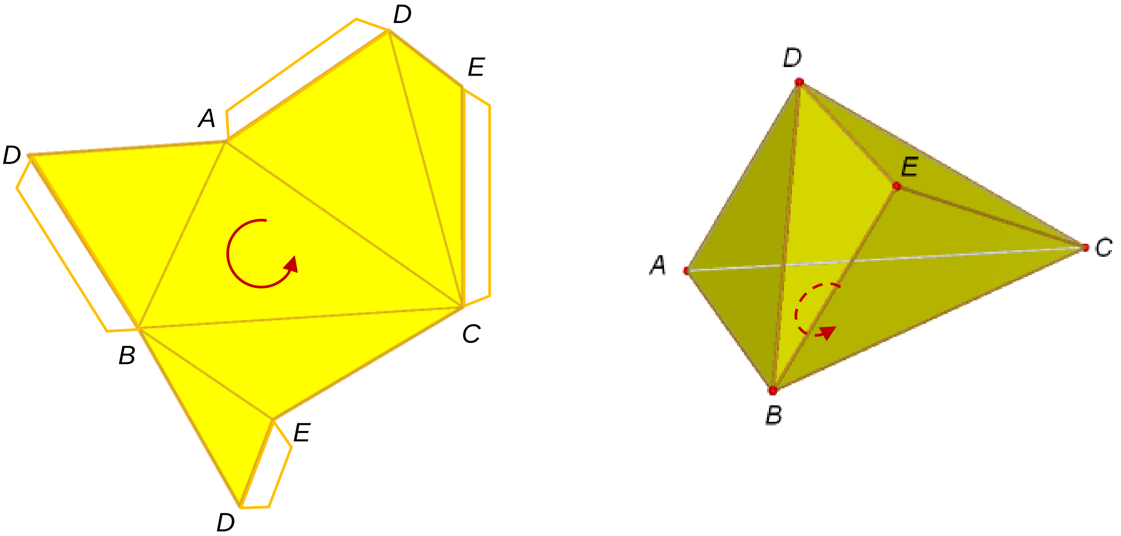
Eulerova veta o mnohostenoch
Veta 1 ([1, str. 54])**.** Pre každý konvexný mnohosten, ktorý má *s* stien, *h* hrán a *v* vrcholov, platí rovnosť (*Eulerov vzťah*)

$$\boxed{s+v=h+2\text{, resp. } s+v-h=2}.$$

P o z n á m k a. **L. P. Euler** (žil v rokoch 1707-1783 n.l.) bol švajčiarsky matematik a fyzik, ktorý ale väčšinu života prežil v Rusku a Nemecku. Považuje sa za popredného matematika 18. storočia a jedného z najväčších matematikov všetkých čias. Okrem iných oblastí matematiky má zásluhu aj na rozvoji teórie grafov (s čím súvisí aj jeho veta).

Mnohosteny, pre ktoré platí Eulerova veta, sa nazývajú *eulerovské mnohosteny*. Je zrejmé, že každý konvexný mnohosten je eulerovský. Existujú však aj nekonvexné mnohosteny, pre ktoré platí Eulerov vzťah (jeden taký nekonvexný mnohosten možno získať napr. z kocky).

Základné pravidlo pre tvorbu **siete konvexného mnohostena** je jednoduché: Každý vrchol konvexného mnohostena je spoločným bodom jeho *p* stien a *p* hrán. Orientácia všetkých stien telesa (pri pohľade „zvonka“, resp. „zvnútra“) musí byť tá istá (v súlade s pohybom, resp. proti pohybu hodinových ručičiek) (obr. 3a).



Obr. 3 a) Sieť šesťstena so záložkami, b) šesťsten

Pri tvorbe sietí mnohostenov je praktické označiť vrcholy stenových mnohouholníkov (pre kontrolu) na mnohostene aj na sieti a záložky treba umiestniť tak, aby pozdĺž každej zlepovanej hrany bola najviac jedna (obr. 3ab). Hrany, ktoré spájame, rátame iba raz.

Štandardné základné úlohy o sieťach konvexných mnohostenov sú úlohy na tvorbu (zostrojenie) siete (príp. sietí) k danému mnohostenu (a potom tvorba modelu). Z didaktikcého hľadiska považujeme za hodnotnejšie **úlohy obrátené**: k danému zoskupeniu mnohouholníkov, resp. **k jeho hranici zostrojiť**, ak existuje, **konvexný mnohosten.** Vzniká tak otázka, ako zistiť, či k danému zoskupeniu existuje konvexný mnohosten, pre ktorý je zoskupenie sieťou.

Odpoveď dáva nasledujúca výynamná veta pomenovaná opäť po jej autorovi. Veta má nielen teoretický, ale hlavne **praktický význam pri riešení** rôznych **úloh** o mnohostenoch.

Alexandrovova veta

Veta 2 (Znenie je upravené podľa [2, str.56, Veta 4.2]). Dané zoskupenie mnohouholníkov je sieťou konvexného mnohostena práve vtedy, keď platí:

1. Eulerov vzťah ($s+v=h+2$) pre dané zoskupenie,
2. že súčet hranových uhlov pri každom vrchole je menší ako 360°.

D ô k a z si môže čitateľ pozrieť v [2, str.56]).

Dôsledkom vety je skutočnosť, že k **danej sieti existuje práve jeden konvexný mnohosten** (presnejšie práve jeden typ a žiaden iný typ mnohostena s danou hranicou neexistuje, pričom v rámci typu môže existovať nekonečne veľa mnohostenov).

P o z n á m k a. **A. D. Alexandrov** (1912-1999) bol ruský matematik, ktorý dlhé roky žil a pracoval v Leningrade, v r. 1951 dostal cenu Lobačevského za výsledky v geometrii (v r. 1952-1964 bol rektorom Leningradskej univerzity).

3 Ukážky neštandardných úloh

Pri riešení neštandardných úloh môže nastať, že dané zoskupenie mnohouholníkov síce spĺňa podmienky Alexandrovovej vety, a teda je sieťou nejakého konvexného mnohostena, ale je náročné klasickým spôsobom zobraziť mnohosten do roviny. V prípade jednoduchšej siete (a teda aj mnohostena), je možné po dokázaní, že k danej sieti existuje konvexný mnohosten, zostrojenie jeho papierového modelu priamo na vyučovacej hodine. Pretože jedným z cieľov článku je ukázať aj využitie programu Cabri 3D pri hľadaní konvexného mnohostena k danej sieti, teda zostrojiť virtuálny model a manipulovať s ním, vybrali sme ako ukážku úlohy, kde realizácia tohto cieľa je nielen možná, ale aj pomerne jednoduchá, lebo dané zoskupenia mnohouholníkov sú známe základné rovinné útvary zo školskej geometrie a majú známe vlastnosti. Nasledujúce dve riešené a dve neriešené neštandardné úlohy o sieťach konvexných mnohotenov sú problémové úlohy vhodné na individuálne aj skupinové riešenie a môžu slúžiť aj ako motivačné úlohy.

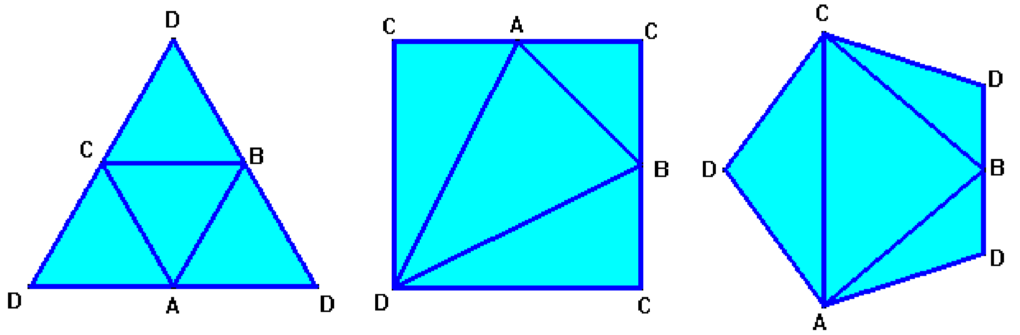
Pri riešených úlohách uvedených v článku aplikujeme vyššie uvedený prístup, teda najprv zistíme (deduktívne), či dané zoskupenia mnohouholníkov sú sieťami, a potom vybraný mnohosten zostrojíme virtuálne v Cabri 3D alebo ukážeme, že sa nedá zostrojiť.

Možno postupovať aj tak, že k danej sieti (v tvare základného geometrickéo útvaru) sa študenti pokúsia najprv zostrojiť v Cabri 3D konvexný mnohosten, potom vysloviť hypotézu o jeho existencii k danej sieti a hypotézu dokázať. Tento prístup môže mať na študentov väčší motivačný účinok.

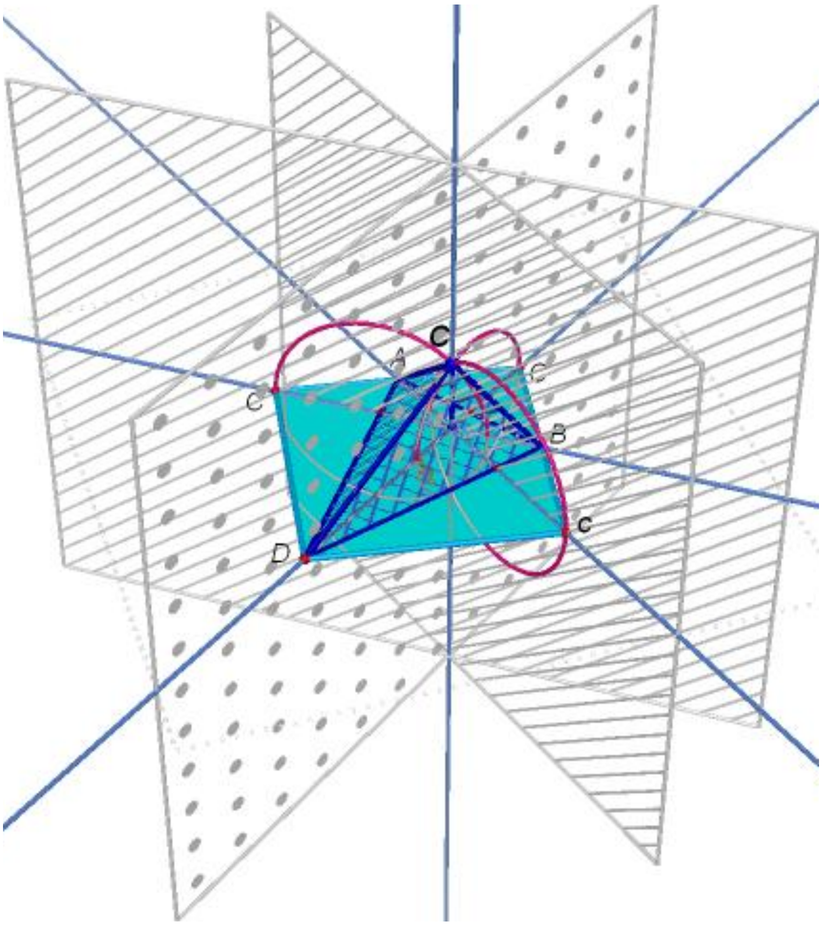
3.1 Dve riešené úlohy s podporou Cabri 3D

Úloha 1 [2, str. 105, Úloha 9.1.2]. Zistite všetky prirodzené čísla *n*, pre ktoré existuje štvorsten, ktorého sieť je pravidelný *n*-uholník.

R i e š e n i e (podľa [2, str. 106]). Vo všeobecnosti je sieť ľubovoľného štvorstena šesťuholník (konvexný alebo nekonvexný) a sieť má 9 hrán (tri hrany ležia v šesťuholníku). Pri rozvinutí do roviny však môžu dve hrany so spoločným vrcholom ležať na jednej priamke. Tým sa počet strán šesťuholníka sa redukuje na $n = 3$, 4 alebo 5 a príslušná sieť má tvar rovnostranného trojuholníka, štvorca alebo pravidelného päťuholníka. Využitím vlastnosti štvorstena o hranových uhloch (Tvrdenie 4) sa presvedčíme, že vo všetkých troch prípadoch sú uvedené pravidelné *n*-uholníky sieťami a teda štvorsten s takou sieťou existuje.



Obr. 4 Možné pravidelné n-uholníky ako siete štvorstena: a) n = 3, b) n = 4, c) n = 5



Obr. 5 Konštrukcia štvorstena ABDC v Cabri 3D nad štvorcovou sieťou (n = 4)

Postup pre zostrojenie štvorstena v Cabri 3D opisovať nebudeme, princíp je ten istý pre všetky tri hodnoty *n*. Podstatou je získať **práve jeden priesečník** troch **kružníc** ako štvrtý vrchol príslušného štvorstena (obr. 5, pre $n = 4$ je to bod *C*). Analogicky sa postupuje aj v nasledujúcej úlohe, kde však priesečník žiadnych dvoch zo štyroch kružníc neexistuje (obr. 7), teda ani vrchol V.

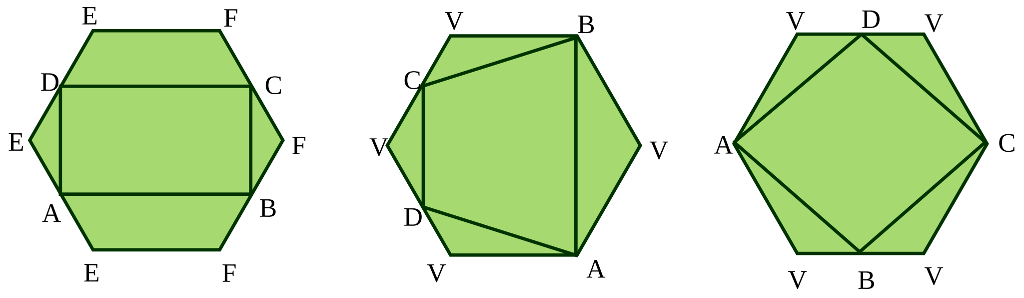
Úloha 2 [2, str. 112, Úloha 9.2.1]. Zistite, či pravidelné šesťuholníky na obr. 6abc sú sieťami konvexných päťstenov.

R i e š e n i e (podľa [2, str. 112]). Treba overiť obdve podmienky **Alexandrovovej vety**.

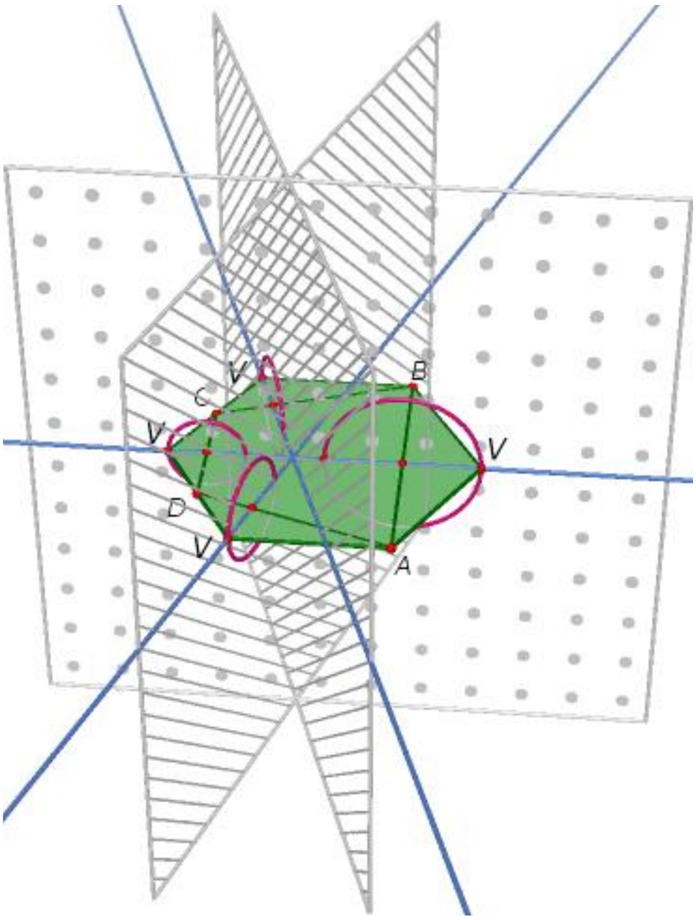
a) Šesťuholník nie je sieťou, pretože vo vrchole E (aj F) nie je splnená 2. podmienka vety o súčte hranových uhlov. Ich súčet je plný uhol, teda má veľkosť 360° (obr. 6a).

b) Šesťuholník nie je sieťou, pretože vo vrchole V nie je splnená 2. podmienka vety o súčte hranových uhlov. Ich súčet má veľkosť 480° (obr. 6b).

c) Šesťuholník nie je sieťou z tých istých dôvodov ako v bode b) (obr. 6c).



Obr. 6 a) b) c) Ukážky zoskupení mnohouholníkov, ktoré nie sú sieťami konvexných päťstenov



Obr. 7 Ukážka, že päťsteny sa nedajú zostrojiť - pre [prípad z obr. 6b](#).

3.2 Dve neriešené úlohy

C1. [2, str. 105, Úloha 9.1.1]. Rozhodnite, či existuje taký **štvorsten**, že jeho niektorá sieť je daný rovnoramenný trojuholník (vhodne rozdelený ďalšími úsečkami, ktoré sú na telese hranami).

C2. [2, str. 105, Úloha 9.1.6]. Nájdite všetky **štvorsteny**, ktorých niektorá sieť je rovnobežník s danými dĺžkami strán a = 10 cm, b = 6 cm a jedným vnútorným uhlom s veľkosťou 45°.

4 Záver

V článku sme chceli naznačiť, že zaradenie témy konvexných mnohostenov a ich sietí s dôrazom na neštandardné úlohy, do učiva stereometrie je opodstatnené - zabránime tým stereotypu (obohatíme obsah učiva) a zvýšime motiváciu. Využitie Cabri 3D pri riešení posúva činnosť študentov do najnáročnejšej etapy - tvorby virtuálnych modelov a manipulácie s nimi. Vyžaduje to od študentov tvorivý prístup, poznatky z planimetrie a sterometrie (vrátane priestorovej predstavivosti), logické myslenie, hľadanie súvislostí a objavovanie. To všetko sú atribúty, ktoré rozvíjajú samostatnosť študentov, budujú a upevňujú ich geometrické predstavy, schopnosť geometricky myslieť, teda pestujú konštruktivistický prístup k riešeniu problémov.

Literatúra

[1] Koblížková, M.: *Objevujme mnohostěny - sbírka řešených úloh pro zájemce o geometrii*. Příloha k dizertační práci. KDM MFF UK, Praha 2004, str.154. http://michaela.koblizci.cz/dokumenty/kniha_mnohosteny.pdf

[2] Konrádová, M.: Archimedovské mnohosteny veselo i vážne. http://www.p-mat.sk/pytagoras/zbornik2004/052_konradova.pdf

[3] Polák, J.: *Přehled stredoškolské matematiky*. Prometheus, Praha 1991, str. 608. ISBN 80-7196-267-8.

[4] Robová, J.: Programy dynamické geometrie a jejich využití ve výuce stereometrie. In: *Potenciál prostredia IKT v školskej matematike I.* E-zborník (editor Žilková, K.), UK Bratislava 2009, str. 63-71. ISBN 978-80-223-2754-1. http://www.webmatika.sk/zbornik-1/clanky/Robova_prispevek.pdf

[5] Vallo, D.: Možnosti Cabri 3D vo vyučovaní geometrie. In: *Zborník abstraktov z 39. konferencie slovenských matematikov*, Jasná 2007, s.35. http://www.konferenciajasna.sk/article/9/

[6] Vranková, E. - Židek, O. - Študencová, Z.: *Geometria 1 - Oživená stereometria*. Interaktívny učebný hypertext (e-skriptá) stereometrie na CD s podporou Cabri 3D. PdF TU v Trnave 2009, str. 170. ISBN 978-80-8082-288-0.

Kontaktná adresa

RNDr. Edita Vranková, PhD.
KMI PdF TU v Trnave
Priemyselná 4, 918 43 Trnava
evrankov@truni.sk