Zobrazenia hranolov a antihranolov pomocou softvéru Poly

The transformation of prisms and antiprisms through the software Poly

Oliver Židek

Abstract

The teaching of knowledge about solid geometry is considered as a difficult topic of school geometry. This is due to several factors. The didactical approach of the teacher, that provides the subject matter to the students, can be considered as one of the significant factors. The presented didactical elaboration of the subject matter about prisms and antiprisms is using the educational software Poly.

Keywords

prism, antiprism, didactical software

1 Úvod

Z pedagogickej praxe, ale aj z rôznych výskumov vyplýva, že zatiaľ čo aritmetické, prípadne algebrické učivo si žiaci na základných i stredných školách osvoja v predpísanom rozsahu takmer spoľahlivo, s nástupom geometrického učiva nastáva u niektorých žiakov „kríza“. Táto skutočnosť by sa mohla javiť ako nepochopiteľná, vzhľadom k tomu, že práve geometria bola, už od antických čias, v školách rôznych úrovní silne zastúpená a zdalo by sa, že aj didaktické postupy výučby geometrie sú už históriou spoľahlivo preverené. O príčinách tohto javu sa čitateľ môže dozvedieť v odporúčaných statiach a pravdepodobne ani tam nenájde spoľahlivú a úplnú odpoveď. Preto za cieľ v tomto príspevku si zvoľme zámer ukázať možnosti didaktického postupu, v ktorom sa žiak s vybraným geometrickým učivom zoznámi prostredníctvom viacerých prístupov začínajúc modelovaním geometrických telies, pokračujúc ich zobrazovaním, vrátane zobrazovania zvolených telies prostriedkami IKT a použitím vhodného didaktického softvéru. Za vhodný výber učiva na prezentovanie načrtnutého postupu zvolíme pomerne elementárne učivo o hranoloch a antihranoloch, ktoré sa v rôznom rozsahu vyskytuje už na 1. a 2. stupni ZŠ a taktiež je obsahom prípravy učiteľov pre uvedené stupne škôl.

2 Hranoly a antihranoly v školskej praxi

Všeobecná definícia pojmu hranol sa vyskytuje v rôznych matematických prameňoch, avšak z hľadiska výskytu týchto telies v školskej matematike sa spravidla stretávame s pojmom pravidelný hranol, teda hranol, ktorý má za podstavu pravidelný n - uholník a bočné hrany sú kolmé na rovinu podstavy. V tejto súvislosti aj *kocku môžeme považovať za pravidelný štvorboký hranol, ktorého podstavná hrana je zhodná s bočnou hranou.* Takýto didaktický pohľad na kocku je iste obohacujúci, najmä preto, že často chápeme kocku ako *pravidelný mnohosten*, teda konvexný mnohosten, ktorého všetky steny sú štvorce. Obidva načrtnuté prístupy sú v školskej geometrii vhodné, o preferencii jedného z nich rozhoduje viac didaktických faktorov. Napokon sa možno podarí dosiahnuť stav, ktorý integruje viaceré prístupy k vymedzeniu zvoleného geometrického pojmu, čo považujeme za optimálny stav.

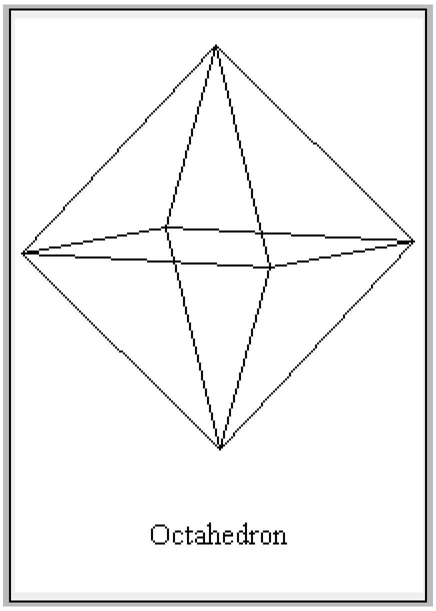
Za počiatočné úlohy z témy o hranoloch sa považuje zobrazenie n - bokých hranolov v niektorej zobrazovacej metóde, a to v rozsahu vzdelávacieho kurzu.. Za zobrazovaciu metódu sa spravidla volí voľné rovnobežné premietanie a za rozsah jednotlivých typov pravidelných n - bokých hranolov sa považujú hranoly pre n = 3, 4, 5, 6. Zobrazenie kocky, teda pre n = 4 nie je veľkým problémom, ak sa uspokojíme s jediným - tradičným pohľadom (zhora a sprava), avšak táto úloha je predurčená k rozšíreniu poznatkov o voľnom rovnobežnom zobrazení prostredníctvom zjednodušenej Pohlkého vety. V takom prípade naučíme žiakov zobraziť kocku aj v neštandardnej polohe. Napriek usilovnej snahe didaktikov matematiky vniesť tento poznatok do učiva základnej školy, efekt sa v tejto oblasti príliš nedostavuje.

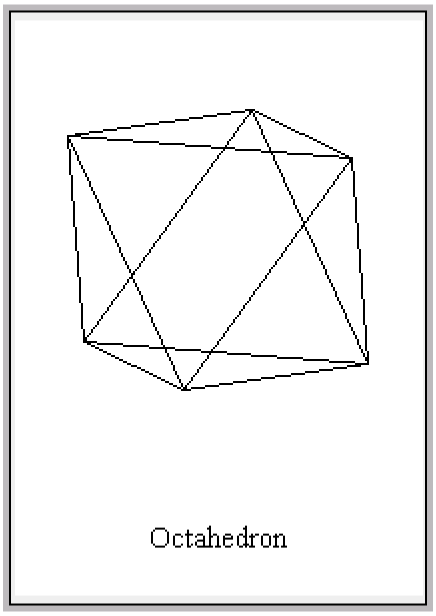
Pri zobrazení pravidelného 3 - bokého hranola nie je spravidla problém identifikovať podstavu, ale jej zobrazenie v pevne zvolenom a najčastejšie frekventovanom type zobrazenia sa prejavia rôzne „slabé miesta“ poznatkov o výškach, ťažniciach a ďalších významných vlastnostiach tohto špeciálneho trojuholníka. Podobne je tomu tak aj pri pravidelnom 6 - bokom hranole, ten však je zvládnuteľný vzhľadom na jeho špeciálnu vlastnosť strany vo vzťahu k polomeru opísanej kružnice. Pravidelný 5 - boký hranol prinesie takmer v každom cyklickom a špirálovitom postupe klasický problém, že žiak nevie alebo zabudne konštrukciu pravidelného 5 - uholníka.

Konštrukčné úlohy na hranoloch sú stále tradične v osnovách i učebniciach poňaté a pre dosť značnú žiacku komunitu sa stávajú neprekonateľnou prekážkou v ich zvládnutí. Jedna z príčin je aj značná časová náročnosť zobrazenia jednotlivých zadaní, takže počet úloh na precvičenie ďalších úloh na telesách sa tým zníži, čo sa odrazí v celkovej poznatkovej kvalite žiakov. Racionalizácia tejto činnosti je možná. Čitateľovi takú možnosť ponúkneme v ďalšej časti tohto príspevku.

Za zmienku stojí skutočnosť, že kocka patrí do množiny *pravidelných mnohostenov* – je teda Platónovským telesom, čo poskytuje námet na vnímanie tohto telesa aj z iného, obohacujúceho, hľadiska. K rozšíreným poznatkom o pravidelných hranoloch patrí aj skutočnosť, že ich môžeme považovať aj za nekonečnú množinu polopravidelných mnohostenov (Archimedovských telies), v prípade, že bočnými stenami sú štvorce.

Aj n - boké antihranoly môžu, pre každé $n \geq 4$, byť Archimedovskými mnohostenmi. Antihranoly sú telesá, ktorých podstavy sú pravidelné n - uholníky a bočné steny sú (v prípade Archimedovských telies) rovnostranné trojuholníky. Symbolika pre vrcholovú postupnosť (3, 3, 3, n) vyjadruje, že pri každom n - uholníku sú zoskupené 3 trojuholníkové steny. Pre n = 3 dostaneme Platónovské teleso - pravidelný osemsten. Tento prekvapujúci výsledok je pri konštrukcii modelov antihranolov z didaktického hľadiska veľmi objavný, občas využitý pri riešení vhodných úloh so stereometrickým námetom.





Obr. 1 a) Zobrazenie osemstena v „štandardnej polohe“ b)Zobrazenie osemstena ako antihranola

Antihranoly sa spravidla v osnovách školskej matematiky takmer nevyskytujú. Príčin tohto javu je viac. Môžeme sa domnievať, že tradičná školská geometria neposkytovala postačujúci priestor na nácvik schopnosti zobraziť tieto telesá v názornej zobrazovacej metóde a následne sa pravdepodobne nevyskytovali ani rôzne polohové a metrické úlohy motivované na antihranoloch.

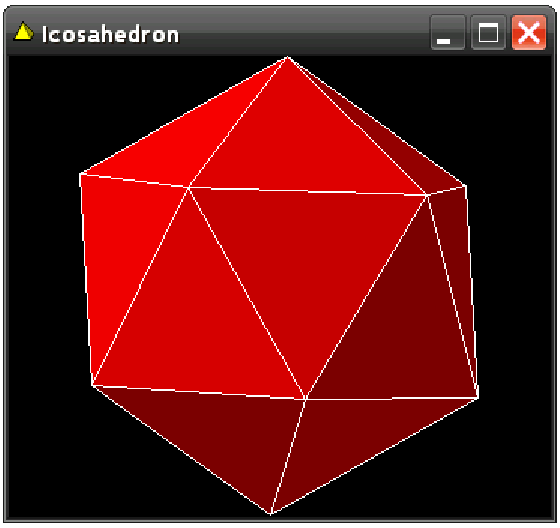
Podobne ako pravidelné n – boké hranoly môžeme s určitým dohovorom zaradiť medzi polopravidelné telesá, môžeme do tejto množiny zaradiť aj niektoré antihranoly, ako už čiastočne vyplýva z predchádzajúceho textu (ak je splnená podmienka, že bočné steny sú rovnostranné trojuholníky. Čitateľ si iste uvedomí, že zatiaľ čo zobrazenie antihranolov nie je vždy jednoduché, ich siete sa získajú ľahko. Teda tvorba modelov týchto telies je pomerne jednoduchá, najmä ak použijeme stavebnice typu Polydron, Geomag, alebo aj obyčajný kartón lepený, prípadne pospájaný gumenými prstencami, čo sa v praxi stále dá využiť najmä pre finančnú nenáročnosť.

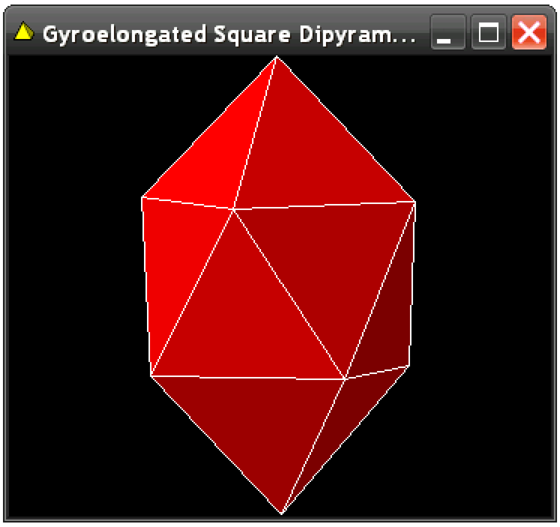
3 Netradičný výskyt antihranolov v geometrii

Vyššie uvedená ukážka „pseudoantihranola“ v podobe pravidelného oktaédra nabáda všimnúť si modely antihranolov a niektorých ďalších špeciálnych mnohostenov:

- Z množiny pravidelných mnohostenov sa ako najatraktívnejšie teleso javí pravidelný 20 - sten (ikosaéder), ktorý môžeme taktiež vnímať ako teleso ,ktorého časť je polopravidelný mnohosten typu antihranol s 5 - bokou podstavou, vhodne doplnený o dva pravidelné 5 - boké ihlany.
- Z množiny deltaédrov je možné 16 - stenný deltaéder vnímať ako teleso, ktorého súčasť je antihranol so štvorcovou podstavou, vhodne doplnený o dva pravidelné 4- boké ihlany.

Uvedený akcent na antihranoly ako súčasti iných špeciálnych mnohostenov sú užitočné pri úlohách o sieti týchto telies a pri snahe obmeniť ich tvary, čo môže byť vhodným kombinatorickým cvičeným obohacujúcim rozvoj priestorovej predstavivosti. Navyše úlohy o optimálnych trajektóriách po povrchu telies riešené na antihranoloch by boli v zbierkach úloh iste netradičným obohatením.





Obr. 2 a) Ikosaéder b) 16-stenný deltaéder

4 Zobrazenie hranolov a antihranolov prostriedkami IKT

Aj prostredníctvom zobrazenia geometrických útvarov smeruje naša didaktická cesta k posilneniu abstraktných predstáv o geometrických objektoch. Na tejto vzdelávacej ceste môžeme s úspechom využiť virtuálnu poznávaciu aktivitu, využívajúc pritom vhodný didaktický softvér, ktorého „interpretačné možnosti môžu zdokonaliť proces učenia a prispieť k rozvoju myšlienkových a tvorivých aktivít žiakov“ (Žilková, 2005).

V nasledujúcej časti uvedieme príklad *virtuálneho* pozorovania a *štúdia* niektorých vlastností špeciálnych typov mnohostenov tak, ako bol tento postup viacnásobne používaný v matematickej a didaktickej príprave učiteľov matematiky vrátane učiteľov pre 1. stupeň základných škôl. V uvedenej súvislosti môžeme za vydarený produkt považovať softvér s označením Poly 1.05, 1.08, 1.10, 1.11, postupne modifikovaný a dostupný aspoň v demoverzii na Internete (www.peda.com). Čitateľ má možnosť získať informácie o prevádzkových podmienkach využívania programu ako aj o možnosti zakúpenia uvedeného softvéru. Program umožňuje užívateľovi získať prehľad o nasledujúcich typoch telies:

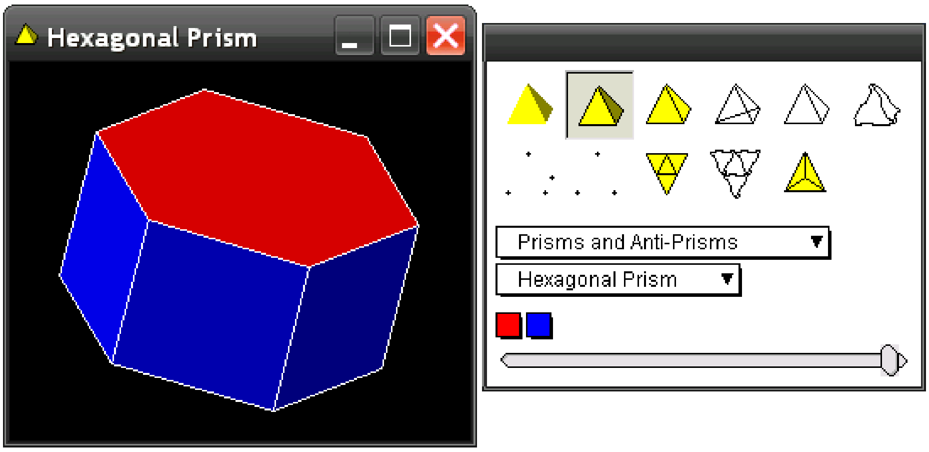
1. *Platónove telesá* (konvexné mnohosteny, všetky steny sú zhodné pravidelné n-uholníky, pri každom vrchole je zoskupený rovnaký počet stien; spolu 5 typov telies, ktorými sú: pravidelný štvorsten, šesťsten, osemsten, dvanásťsten a dvadsaťsten);
2. *Archimedove telesá* (konvexné mnohosteny, všetky steny sú pravidelné n-uholníky, pričom môžu byť aj rôzneho typu, zoskupenia mnohouholníkov pri všetkých vrcholoch sú zhodné; spolu 13 typov telies);
3. *Hranoly a antihranoly* (pravidelné hranoly – podstava je pravidelný n-uholník, bočné steny sú štvorce; antihranoly – podstava je pravidelný n-uholník, bočné steny sú zhodné, rovnostranné trojuholníky. Z nekonečného počtu týchto telies spolu program poskytuje 10 typov. Aj takto definovanú skupinu telies často zaraďujeme medzi polopravidelné mnohosteny vymedzené v bode 2.);
4. *Johnsonove telesá* (konečný počet konvexných mnohostenov so stenami tvaru pravidelných n-uholníkov; ďalšie podmienky sú zložitejšie, dajú sa pri ich zobrazení aspoň intuitívne postrehnúť - spolu 92 typov telies);
5. *Deltaédry* (konvexné mnohosteny, ktorých všetky steny sú zhodné rovnostranné trojuholníky; spolu 8 typov, pomerne neskoro vymedzená konečná množina telies -1947);
6. *Katalánske telesá* (duálne telesá k Archimedovským telesám; konštrukcia je založená na princípe: stred steny pôvodného telesa je vrchol nového telesa; spolu 13 typov telies);
7. *Dipyramídy a deltoédry* (dipyramídy sú duálne telesá k hranolom, deltoédry sú duálne telesá k antihranolom; ukážka obsahuje 10 typov telies);
8. *Geodetické guľovité kupoly* (obohatenie o tento typ telies sa vyskytuje až v produkte Poly 1.11).

Z uvedených 8 ponúk programu Poly vo vzťahu k prezentovanej problematike vyplýva, že zobrazenie hranolov a antihranolov sa v obmedzenom rozsahu dá získať pomerne jednoducho, čo umožňuje získať kvalitné „obrázky“ týchto (i ďalších) typov telies pomocou voľne dostupného didaktického softvéru aj tým žiakom, ktorí zatiaľ jednak nemajú požadované geometrické poznatky pre úspešné zvládnutie tohto problému. Program racionalizuje výučbu v tej fáze, kedy nie je cieľom iba zobraziť teleso, ale na zobrazenom telese riešiť niektoré polohové alebo metrické úlohy s obvyklým didaktickým, prípadne technickým námetom.

Z uvedených typov telies si môže užívateľ programu zvoliť:

a) Zobrazenie telesa s vyznačením hrán bielej farby na čiernom pozadí (obr. 3).
b) Zobrazenie telesa v jednofarebnom prevedení jeho stien.
c) Zobrazenie telesa vo farebnom prevedení za použitia tieňovania niektorých stien s cieľom získať názornejší obraz.

d) Zobrazenie telesa vo farebnom prevedení so zvýraznením jeho hrán úsečkami bielej farby.
e) Zobrazenie iba vrcholov telesa (všetkých).
f) Zobrazenie vrcholov telesa viditeľných v príslušnej projekcii.
g) Schlegelov diagram zostrojený z príslušného telesa.
h) Siete jednotlivých telies v statickej podobe.
i) Siete jednotlivých telies v dynamickej podobe, t. j. plynulé rozvinutie stien telesa do roviny (obr. 2a, 2b, 3a, 3b).
j) Plynulú animáciu zobrazeného mnohostena do ľubovoľnej polohy k priemetni.
k) Zvoliť jednu alebo niekoľko farieb z bohatej ponuky.
l) Vytlačiť pomocou tlačiarne zobrazené teleso v požadovanej polohe vrátane siete a názvu (často veľmi komplikovaného).



Obr. 3 Nástroje pedagogického softvéru s názvom Poly Pro, zobrazený hranol s vyznačením hrán a farebným zvýraznením stien s aplikáciou tieňovania

5 Netradičné ukážky námetov úloh o hranoloch a antihranoloch

V článkoch (Žídek, 2005, Žilková, 2010) sa vyskytuje ukážka zjednodušeného geometrického problému týkajúceho sa princípu duality v geometrii telies. Táto výnimočne krásna vlastnosť taktiež absentuje v bežnej školskej geometrii a iba výnimočne sa vyskytne v modifikácii „vpísať načrtnutým spôsobom do kocky pravidelný osemsten. Je to úloha s nenáročným zadaním, pretože zobraziť kocku vo voľnom rovnobežnom premietaní nie je náročné a vyučuje sa pomerne zavčasu v školskej geometrii. Zároveň táto úloha veľmi zodpovedne rozdiferencuje žiakov podľa stupňa rozvoja priestorovej predstavivosti, čo má význam jednak z diagnostického hľadiska a taktiež je úloha prínosom z vyučovacieho hľadiska, pretože podporuje schopnosť „vidieť v priestore". Úloh tohto typu, kedy stačí jednoduché zadanie a minimálna poznatková hladina zo zobrazovacích metód je pomerne málo, avšak didaktický softvér nám umožní bez náročných zobrazovacích techník získať zobrazenie telesa a následne do takto získaného „obrázku" môžeme vkladať vlastné riešenia ďalších gradovaných úloh.

Výhodou vyššie uvedenej kombinovanej metódy ktorá využíva didaktický softvér a zároveň tradičnú technológiu rysovania je okrem iného aj v tom, že s ľahkosťou vyrobíme zobrazenie telesa v netradičnej polohe a tým gradujeme náročnosť zadania.

V kontexte separovaného problému, ktorý využíva napríklad konštrukciu a zobrazenie duálnych telies k daným uvedieme nasledujúce ukážky úloh.

Úloha č. 1: Zobrazte hranaté teleso, ktorého vrcholy sú stredy stien danej kocky.

Komentár a návod pre učiteľa: Úlohu môžeme riešiť v tradičnej zobrazovacej metóde zobrazenia kocky teda v pohľade zhora a sprava, ale pomocou opisovaného softvéru môžeme vyrobiť náročnejšie zadania a to tak, že zobrazíme kocku v rôznych neštandardných polohách. Je tu príležitosť vnútorne diferencovať žiakov tak, aby všetci boli v riešení úspešní, avšak na rôznom stupni obťažnosti zadania úlohy. Výsledkom je spravidla elegantný obrázok pravidelného osemstena – telesa duálneho k pravidelnému šesťstenu – kocke.

Úloha č. 2: Zobrazte hranaté teleso, ktorého vrcholy sú stredy kružníc opísaných stenám pravidelného osemstena!

Komentár a návod pre učiteľa: Úloha je náročnejšia vzhľadom na náročnosť zobrazenia daného telesa, ale aj v nadväznosti na hľadanie zobrazenia vrcholov nového telesa. K zobrazeniu telesa môžeme využiť program Poly a následný poznatok sa týka zachovania podielového pomeru ako invariantnej vlastnosti rovnobežného premietania. Výsledný obrázok je spravidla veľmi estetický, a keďže sa dá pomerne ľahko skontrolovať nielen správnosť, ale aj presnosť vyriešenia úlohy, je to pozitívny didaktický prvok z hľadiska výchovného vo vzdelávacom procese.

Úloha č.3: Zobrazte hranaté teleso, ktorého vrcholy sú stredy stien pravidelného štvorbokého hranola, ktorý nie je kockou! Riešte podobnú úlohu napr. pre viaceré n-boké hranoly.

Komentár a návod pre učiteľa: Úloha minimálne rozširuje predstavu o zmene zadania i výsledku vo vzťahu k úlohe č. 1, je však užitočná a poskytuje priestor pre zoznámenie sa s telesami typu dypiramíd. Zdanie zjednodušíme, alebo urobíme náročnejším s rôznou voľbou zobrazenia hranolov s podstavou vo všeobecnej polohe.

Úloha č.4: Zobrazte hranaté teleso, ktorého vrcholy sú stredy kružníc opísaných stenám antihranolov, ktorých podstavy sú rôzne pravidelné n–uholníky!

Komentár a návod pre učiteľa: Úlohu sme neformulovali parciálne pre jednotlivé typy podstáv – to ponecháme na praktickú aplikáciu a príslušnú vhodnosť vo vzťahu k náročnosti, ale možností gradovať náročnosť úlohy je veľa a sú už načrtnuté v predchádzajúcich úlohách. Za pozitívny prvok tejto úlohy môžeme považovať skutočnosť, že so vznikom duálneho telesa k jednotlivým antihranolom sa vynára otázka, či tieto telesá netvoria nejakú špeciálnu množinu konvexných mnohostenov a minimálne sa ponúka možnosť urobiť túto inventúrnu činnosť v ponuke použitého softvéru Poly.

6 Záver

Niektoré z naznačených didaktických problémov môžeme úspešne riešiť zaradením manipulačných aktivít, ktoré by sa mali stať pri výučbe geometrie organickou súčasťou bežných pedagogických praktík najmä v počiatočných fázach vyučovania geometrie.

K manipulačným aktivitám môžeme použiť predmety, ktoré nás priamo obklopujú, stačí niekedy obyčajný papierový model, ale často na uvedený cieľ použijeme špeciálne pomôcky, ktoré sa nedajú úspešne doma, či v škole zhotoviť, a preto ich získavame kúpou v špeciálnych distribučných predajniach. K pomôckam súvisiacim s načrtnutou témou patria už zmienené stavebnicové konštrukčné systémy. Avšak v následnej etape získavania geometrických poznatkov nesporne patrí zobrazovanie telies, ich častí a náročnejších konfigurácií a preto sme zvolili opis osvedčeného didaktického obsahu i postupu, ktorý sa v našej tradičnej škole nevyskytoval z dôvodu absencie možnosti využiť IKT pri vyučovaní poznatkov z geometrie. Zásadnou požiadavkou na inovovaný didaktický postup nebolo iba vykonať substitúciu zhotovovania geometrických obrázkov výlučne počítačovou technológiou, ale cieľom bolo poukázať na možnosť kombinovaného postupu pri výučbe tejto sčasti netradičnej témy.

Literatúra

[1] Židek, O.: Manipulačné a virtuálne štúdium niektorých vlastností špeciálnych mnohostenov. In: *Vyučování matematice z pohledu kompetencí žáka a učitele 1. stupně základního vzdělávání.* Plzeň:Západočeská univerzita, 2007. s. 204-209. ISBN 978-80-7043-548-9.

[2] Židek,O.: Kombinované používanie elektronických a manuálnych pomôcok pri výučbe geometrie. In: *História, súčasnosť a perspektívy učiteľského vzdelávania.* Banská Bystrica: UMB, 2004, str. 180-182. ISBN 80-8083-107-6.

[3] Židek, O.: Konvexné polopravidelné mnohosteny. In: *Facultatis Paedagogicae Universitatis Tyrnaviensis.* Trnava: str. 175-183, 1998.

[4] Židek, O.: O pravidelných mnohostenoch na ZŠ. In: *Matematika a fyzika ve škole*. roč. 11, č. 2 a pokr. v č. 3, 1980

[5] Židek, O., *Štúdium duality niektorých mnohostenov.* In: Zborník ACTA MATHEMATICA 8. Nitra: UKF, Prírodovedec č. 188, 2005, ISBN 80-8050-896-8

[6] Žilková, K. : *Školská matematika v prostredí IKT.* Bratislava: Univerzita Komenského, 2009. s. 90-91. ISBN 978-80-223-2555-4

[7] ŽILKOVÁ, K.: Komunikačné rozhranie v procese tvorby počítačového modelu matematického problému. In: *Didactic Conference in Žilina with international participation Didza.* Žilina: Fakulta prírodných vied ŽU, 2005. ISBN 80-8070-429-5

[8] Žilková,K.: Dualita pravidelných telies v dynamickom geometrickom systéme. In: *Education and Technology* [ed. Bednarczyk, H. – Salata, E.]. Radom: Wydawnictvo Instytutu Technologii Eksploatacji, 2010, s. 286-290, ISBN 978-83-7204-915-5

[9] www.peda.com

Kontaktná adresa

Doc. PhDr. Oliver Židek, CSc.
Katedra matematiky a informatiky
Pedagogická fakulta, Trnavská univerzita
Priemyselná 4
918 43 Trnava
e-mail: oliver.zidek@gmail.com