

# **Problémy tvorby didaktických materiálov na vyučovanie matematiky v IKT prostredí**

## **The difficulties of creation didactical materials for teaching mathematics in the ICT environment**



**Katarína Žilková**

### **Abstract**

The paper describes the difficulties in developing didactical materials centred on the teaching mathematics in an ICT environment. A part of the paper is a didactic elaboration proposal of the selected topic of school mathematics (translation in the plane) through ICT. The activities, tasks, assignments and methodological notes are described in detail and there are also some links to the Internet resources with educational math content, as well as materials in form of electronic tasks, animations and geometric tasks. The aim was to highlight the great variability, a broad spectrum of sources and different approaches of mathematical education in the ICT environment.

### **Keywords**

education, ICT environment, interactivity, math, translation

## 1 Úvod

Teória vyučovania matematiky poskytuje široké spektrum rôznych foriem, metód, prostriedkov a zásad aplikovaných vo vyučovaní matematiky. V dávnejšej minulosti sa hovorilo o výpočtovej technike (v tomto kontexte boli na mysli najmä počítače), o spätnom projektore, neskôr dataprojektore, magnetofóne a ďalších audiovizuálnych prístrojoch ako o didaktických prostriedkoch (v niektorých špeciálnych prípadoch pomôckach) matematického vzdelávania. V súčasnosti, pod vplyvom technického rozvoja a vzniku nových využiteľných elektronických prostriedkov (napr. interaktívna tabuľa, vizualizér, hlasovacie zariadenia, atď.) možno hovoriť o komplexe činiteľov, ktoré vstupujú nielen do matematického vzdelávania, ale ovplyvňujú vyučovanie takmer všetkých predmetov. Sú to zväčša prostriedky zamerané na prácu s informáciami, ich získavanie, spracovanie, prenos, pre ktoré sa zaužívalo súhrnné označenie „*prostriedky informačných a komunikačných technológií*“. V súlade s odbornou pedagogicko-psychologickou terminológiou možno konštatovať, že všetky IKT prostriedky dotvárajú prostredie v škole, resp. v triede, a preto možno hovoriť o **prostredí informačných a komunikačných technológií**.

V uvedenom prostredí má výučba matematiky svoje špecifiká, i keď je potrebné konštatovať, že základné princípy teórie vyučovania matematiky sa vplyvom nových technológií v praxi zachovávajú. Mení sa čiastočne len ich podoba realizácie v praxi. Technické ovládanie prostriedkov IKT (základy práce s nimi) patrí už k „abecede“ moderného vzdelania. Avšak z hľadiska vzdelávania učiteľov matematiky v tejto oblasti nemožno považovať za dostatočné iba zvládnutie základnej obsluhy IKT prostriedkov, ale najmä ich účelné a efektívne využívanie vo vyučovacom procese, prípadne v celkovej práci učiteľa. Uvedený aspekt zvyšuje podstatne nároky na výchovu modernej učiteľskej verejnosti. Okrem oboznámenia sa s najnovšími matematickými softvérovými produktmi je snáď najdôležitejším cieľom zamerať pozornosť na **didaktiku matematiky v prostredí IKT**. S poľutovaním treba konštatovať, že na Slovensku zatiaľ nie je kompletne vypracovaná špecializovaná časť didaktiky matematiky, ktorá by reflektovala spomínané využívanie IKT v priamom vyučovacom procese. Existuje však monografické teoreticko-aplikačné spracovanie vybraných častí školskej matematiky (K. Žilková, 2009), súbory príspevkov viacerých autorov monotematického charakteru (J. Fulier, 2005, 2006, L. Koreňová, 2009, E. Partová, 2007), viaceré štúdie uverejňované v odborných časopisoch, resp. zborníkoch (P. Hanzel, 2008, D. Vallo 2009, K. Vidermanová, 2009, J. Melušová, 2009, P. Híc - M. Pokorný, 2004, 2008), ktoré sa načrtnutou problematikou zaoberajú. V rámci riešenia projektov „Modernizácia vzdelávacieho procesu na základných a stredných školách“ vznikli ucelenejšie metodické materiály vybraných častí školskej matematiky, ktoré reflektujú na nové trendy v oblasti matematického vzdelávania v prostredí IKT (S. Lukáč a kol., 2010, I. Semanišinová a kol., 2010).

## 2 Prečo nemáme didaktiku matematiky v prostredí IKT?

Tvorba kvalitného didaktického materiálu zameraného na matematické vzdelávanie v prostredí IKT je nesmierne náročná. Okrem spracovania teoretického základu z didaktiky matematiky v danej tematickej oblasti musí byť inovovaný materiál doplnený

- o **teoretické princípy, spôsoby a možnosti integrácie prostriedkov IKT** – hľadajú sa odpovede na otázky:
  - „*Prečo použiť IKT?*“ - zdôvodnenie, v čom bude využitie prvkov IKT pre žiaka alebo pre učiteľa v danej téme prínosné, aká je funkcia zaradenia IKT v danej téme.
  - „*Čo použiť?*“ – dôsledný a kvalifikovaný výber vhodných programových aplikácií a hardvérových prostriedkov.
  - „*Ako použiť?*“ - spôsob užívateľského ovládania (rôzne technické poznámky a návody) a tiež metódy integrácie IKT, t. j. ako má učiteľ vyučovať, resp. ako sa má žiak/žiaci učiť pomocou IKT prostriedkov).
- o **aplikačné ukážky**, ktoré v plnej miere využívajú prednosti prostredia IKT (interaktivita, dynamika, vizualizácia, atď.). Spracovanie ukážok, príkladov, úloh, cvičení môže byť
  - *uzavreté* (pripravené na okamžité použitie) – môže sa jednať napríklad o animácie vizualizujúce isté princípy a postupy, ďalej malé interaktívne programové produkty zamerané na riešenie úloh jedného typu.
  - *otvorené* – učiteľ, resp. žiak dotvára, alebo vytvára vzdelávací materiál (prípadne riešenie úlohy) priamo na vyučovaní. Napríklad riešenie geometrickej úlohy priamo v prostredí DGS, pričom učiteľ, resp. žiaci vytvárajú vlastnú konštrukciu.

„Životný cyklus“ prostriedkov IKT (softvérových aj hardvérových) je veľmi krátky, čoho dôsledkom je ich neustála zmena (výmena) a rôznorodosť. Preto je veľmi náročné vytvoriť didaktiku hoci len niektorých vybraných častí matematiky, ktorá by bola

- dostatočne *všeobecná a platná na dlhšie časové obdobie*, ale zároveň
- dostatočne *konkrétne s využiteľnými aplikačnými ukážkami*.

Ak chcú potenciálni autori využiť hotové aplikácie zverejnené na webových stránkach, je potrebné mať zmapovanú nielen **odbornú úroveň** daného materiálu, ale overený aj **zdroj** webovej stránky a odhadnúť **trvácnosť** publikovania príslušnej ukážky. Pri tvorbe autorského elektronického vzdelávacieho materiálu, treba mať zasa prehľad o množstve (aj vedľajších) softvérových produktov nápomocných k technickému spracovaniu podkladov. Ako príklad možno uviesť elektronické kurzy autorov P. Híca a M. Pokorného (2004, 2008), ku ktorým bolo potrebné nastudovať a použiť programovací jazyk Borland Delfi, softvér na spracovanie videosekvencií Macromedia Robodemo, hlavná časť kurzu je vytvorená v Macromedia Authorware a je umiestnený v prostredí LMS. Isteže záverečnému výberu prostredia, v ktorom sa materiál zhotovuje predchádza dôkladné štúdium množstva iných analogických produktov.

Ďalšia problémová charakteristika v súvislosti s tvorbou didaktiky v prostredí IKT je ťažkosť slovného opisu aktivít, ktoré IKT prostredie umožňuje. Uvedený problém možno riešiť využitím sekvencie obrázkov, ktoré dotvárajú predstavu o zamýšľanej aktivite, alebo využiť elektronickú formu didaktiky, ktorá môže obsahovať rôzne doplňujúce materiály: videá, animácie, zvukové záznamy a pod.

Existuje ešte veľa činiteľov, ktoré majú zásadný vplyv na tvorbu didaktiky matematiky v prostredí IKT a aj vyššie uvedené požiadavky a problémy by bolo potrebné dôkladnejšie a podrobnejšie spracovať. Vzhľadom na ohraničený priestor príspevku sa pokúsime sústrediť pozornosť na didaktické spracovanie jednej konkrétnej témy školskej matematiky s integrovanými prvkami prostredia IKT.

### 3 Návrh didaktického spracovania témy „Posunutie v rovine a jeho vlastnosti“ v IKT prostredí

V predložený návrh je členený na niekoľko častí:

- objavovanie vlastností posunutia,
- zobrazovanie bodov a útvarov v určenom posunutí,
- riešenie konštrukčných úloh pomocou posunutia.

V jednotlivých častiach sú podrobne opísané aktivity, úlohy a metodické poznámky, ďalej sú uvedené odkazy na *internetové zdroje* so vzdelávacím obsahom k danej téme, *autorské materiály* v podobe elektronických úloh (C.a.R. zadanie – rozklad posunutia) a animácií (obsah rovnobežníka netradične), resp. riešených konštrukčných úloh (napr. konštrukcia trojuholníka). Cieľom bolo poukázať aj na možnú variabilitu a širokospektrálnosť zdrojov a spôsobov využitia v matematickom vzdelávaní.

#### 3.1 Objavovanie posunutia a jeho vlastností

##### Aktivita č. 1

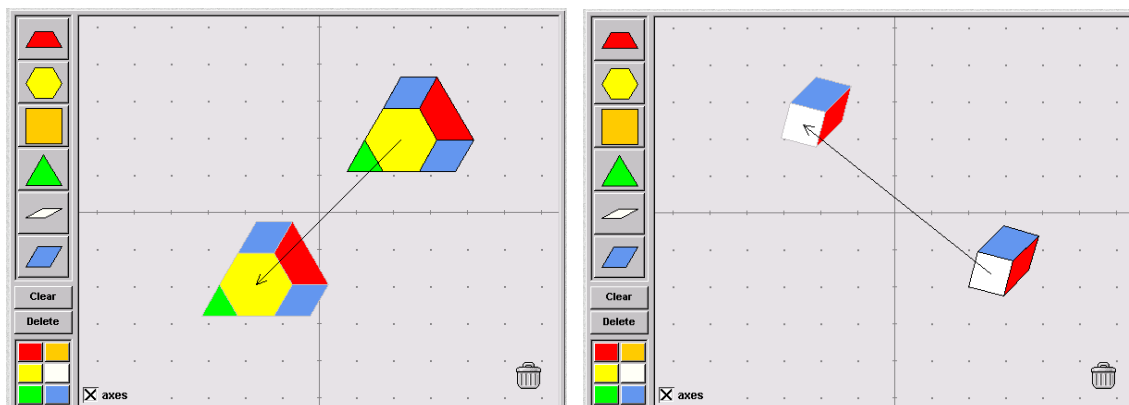
(zdroj:[http://nlvm.usu.edu/en/NAV/frames\\_asid\\_301\\_g\\_2\\_t\\_3.html?open=activities&from=topic\\_t\\_3.html](http://nlvm.usu.edu/en/NAV/frames_asid_301_g_2_t_3.html?open=activities&from=topic_t_3.html),  
[http://nlvm.usu.edu/en/NAV/frames\\_asid\\_167\\_g\\_1\\_t\\_3.html?open=instructions&from=topic\\_t\\_3.html](http://nlvm.usu.edu/en/NAV/frames_asid_167_g_1_t_3.html?open=instructions&from=topic_t_3.html))

Podľa podmienok realizácie výučby poskytnite žiakom v zdroji uvedené (prípadne aj iné) experimentálne prostredie na interaktívnej tabuli, resp. na počítačových staniách (obr. 1a, 1b). Nechajte žiakov oboznámiť sa samostatne s prostredím a vypozerovať, ktoré činnosti sa v ukážke dajú uskutočňovať. V úvodnej etape je vhodné zapnúť voľbu zobrazenia súradnicového systému (vľavo dole „axes“). Potom možno formulovať pre žiakov úlohu.

**Úloha:** Sledujte zmeny, ktoré nastanú po nasledujúcich podnetoch:

- Kliknite a posúvajte útvar s čiernou textúrou po pracovnej ploche.
- Zmeňte polohu vzorového útvaru pomocou pridržiavaného tlačidla myši na niektorom z jeho vrcholov a následným pootočením.
- Zmeňte polohu a dĺžku zobrazenej šípky.

Po každej z uvedených činností formulujte otázky napr. spôsobom: „Čo sa zmení?, Čo sa zachová?, Môžeme získať útvary rôznej veľkosti?“



Obr. 1 a) [http://nlvm.usu.edu/en/NAV/frames\\_asid\\_301\\_g\\_2\\_t\\_3.html?open=activities&from=topic\\_t\\_3.html](http://nlvm.usu.edu/en/NAV/frames_asid_301_g_2_t_3.html?open=activities&from=topic_t_3.html)  
 b) [http://nlvm.usu.edu/en/NAV/frames\\_asid\\_167\\_g\\_1\\_t\\_3.html?open=instructions&from=topic\\_t\\_3.html](http://nlvm.usu.edu/en/NAV/frames_asid_167_g_1_t_3.html?open=instructions&from=topic_t_3.html)

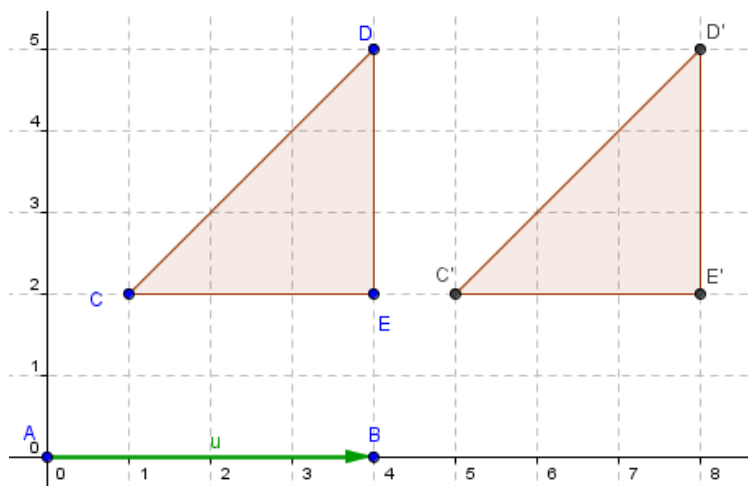
Očakávanými vypozerovanými javmi sú najmä:

- veľkosť útvaru sa aplikovaním transformácie posunutia nemení,
- dĺžka a smer znázornenej šípky majú vplyv na obraz pôvodného útvaru.

## Aktivita č. 2

V skúmaní posunutia a jeho vlastností možno pokračovať využitím interaktívnej konštrukcie vytvorenej v niektorom z programov dynamickej geometrie. Učiteľ si vopred pripraví virtuálny výkres, alebo môže využiť konštrukciu [posunutie1.html](#) (obr. 2) vytvorenú v programe GeoGebra. V konštrukcii je možné:

- meniť polohu daného trojuholníka CDE,
- zmenou polohy jednotlivých bodov C, D, E meniť tvar trojuholníka CDE,
- meniť polohu bodov A, B.



Obr. 2 Interaktívna konštrukcia určená na skúmanie základných vlastností posunutia v rovine

Cieľom využitia uvedenej konštrukcie je sledovanie zmien, ktoré nastanú pri žiackom experimentovaní s jednotlivými útvarmi. Uvedieme ukážku postupnosti inštrukcií a krokov potrebných pre vypozerovanie základných vlastností posunutia:

- Zmeňte polohu trojuholníka CDE na virtuálnom výkrese. Aké zmeny nastali?
- Pokúste sa zmeniť polohu trojuholníka C'D'E'. Ako možno docieľiť zmenu polohy uvedeného trojuholníka?
- Experimentujte s polohou úsečky AB a tiež s polohou jednotlivých bodov A, B. Aký význam v konštrukčnom výkrese majú uvedené zmeny?
- Čo sa stane, ak body A a B splynú?
- Učiteľ zmení polohu trojuholníkov a pomocou nástrojov skryje danú úsečku AB. Úloha pre žiakov: Nájdite úsečku AB. Koľko existuje takých úsečiek, pomocou ktorých bude obrazom trojuholníka CDE trojuholník C'D'E'?

Z didaktického hľadiska je niekedy užitočné skryť osi a mriežku, ktoré definujú karteziánsku súradnicovú sústavu, čím sa docieľi zvýšenie náročnosti aktivity.

### Zhrnutie

Cieľom predchádzajúcich motivačných aktivít je získanie prvotných skúseností s posunutím, s jeho určujúcimi prvkami, vypozerovanie základných vlastností posunutia ako zhodného zobrazenia. V priebehu hľadania odpovedí na predchádzajúce otázky možno upresňovať žiacke objavy a odpovede priebežným zaraďovaním terminologických spresnení.

## 3.2 Zobrazovanie bodov a útvarov v danom posunutí

### Aktivita č. 3

(Zdroj: <http://www.mathsisfun.com/geometry/translation.html>)

Pomocou interaktívnej animovanej ukážky sledujte princíp posunutia zvoleného útvaru (trojuholník, obdĺžnik a šesťuholník).

Úlohou žiakov je vyskúšať a vypozerovať zmeny po posunutí zobrazených n-uholníkov, ktoré je možné v aplikácii určovať dvomi spôsobmi.

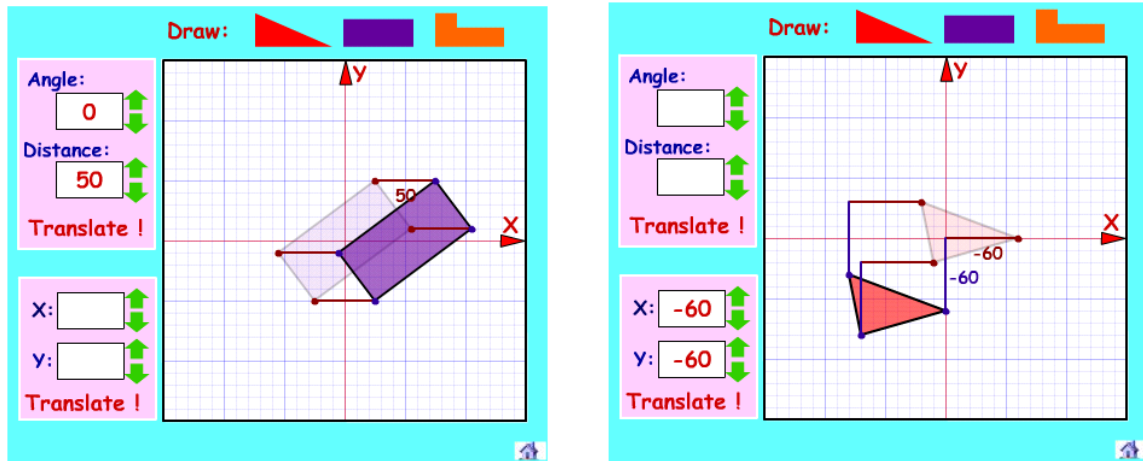
1. Prvý spôsob je založený na princípe posunutia daného orientáciou a dĺžkou, pričom orientácia sa určuje orientovaným uhlom vyjadreným v stupňovej miere vzhľadom k osi x (obr. 3a).
2. Druhý spôsob realizuje posunutie horizontálne v smere osi x o užívateľom zadané x a vertikálne v smere osi y o zadané y, a teda obrazom každého bodu  $[a, b]$  je bod  $[a+x, b+y]$  (obr. 3b).

Oba spôsoby možno ľubovoľne kombinovať. V priebehu a po samostatnom žiackom experimentovaní možno diskutovať napr. o nasledujúcich témach:

- **zhodnosť** - Aký útvar je obrazom trojuholníka (obdĺžnika, šesťuholníka) v danom posunutí?
- **rovnoobežnosť** - Čo platí o zodpovedajúcich si stranách n-uholníka?



- **konštantná vzdialenosť** – Akú vzdialenosť majú vrcholy posunutého n-uholníka od svojho vzoru? Platí to pre všetky body útvaru?



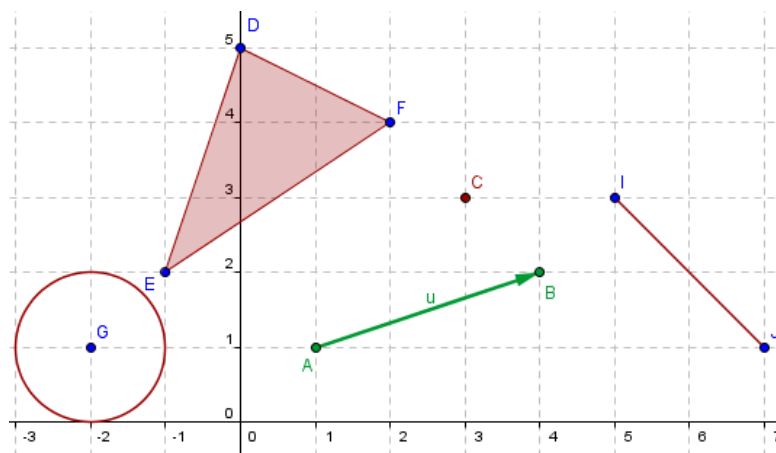
Obr. 3 a) b) <http://www.mathsisfun.com/geometry/translation.html>

#### Aktivita č. 4

(Zdroj: [obrazy\\_posunutie.html](#))

Využite prostredie ľubovoľnej dynamickej geometrie resp. súbor uvedený v zdroji – obr. 4, prípadne interaktívnu konštrukciu z aktivity č. 2 a hľadajte obrazy bodov, úsečiek, priamok, kružníc, n-uholníkov a ďalších útvarov v posunutí danom orientovanou úsečkou  $\overline{AB}$ . V zjednodušenej verzii možno využiť štvorcovú sieť. Na zvýšenie náročnosti je odporúčané štvorcovú sieť skryť. Nevyužívajte pri tom nástroj „posunutie“, ale realizujte konštrukcie pomocou virtuálneho pravítka a kružidla (teda tak, ako žiaci konštruujú vo svojich pracovných zošitoch). Ako príklad uvádzame spôsob získania obrazu daného bodu X v posunutí danom orientovanou úsečkou  $\overline{AB}$ .

**Úloha:** Pomocou pravítka a kružidla zostrojte obraz bodu v danom posunutí.



Obr. 4 Konštrukčná úloha na zostrojenie obrazu bodu, úsečky, kružnice, trojuholníka v danom posunutí.

Priamo z definície posunutia vyplýva konštrukčný postup riešenia úlohy:

*Obrazom bodu  $X$  v posunutí určenom orientovanou úsečkou  $\overline{AB}$  je bod  $X'$ , ktorý je priesečníkom priamky rovnobežnej s  $\overline{AB}$  a prechádzajúcej bodom  $X$  a kružnice so stredom v bode  $X$  a polomerom s dĺžkou orientovanej úsečky  $\overline{AB}$ .*

Obdobným spôsobom hľadajte a zároveň zdôvodňujte konštrukčné postupy na zobrazovanie ďalších útvarov v posunutí. Závery môžu mať nasledujúcu podobu:

*Obrazom ľubovoľnej úsečky v posunutí je úsečka s ňou rovnobežná a zhodná.  
Obrazom ľubovoľnej priamky v posunutí je priamka s ňou rovnobežná.*

Po zostrojení obrazov geometrických útvarov v danom posunutí experimentujte s dĺžkou a orientáciou určujúcej úsečky, pričom žiaci hľadajú odpoveď na otázky:

- *Existujú geometrické útvary, ktoré sa vhodným posunutím zobrazia samé na seba? (Ohraničené útvary neexistujú. Neohraničené útvary, napr. priamka sa v posunutí danom orientovanou úsečkou rovnobežnou s priamkou zobrazí sama na seba.)*
- *Platí tvrdenie: Ak majú dva zhodné trojuholníky rovnobežné všetky navzájom zodpovedajúce si strany, tak jeden je obrazom druhého v posunutí? (Nie, stačí zostrojiť obraz trojuholníka v stredovej súmernosti.)*

### Zhrnutie

Cieľom predchádzajúcich aktivít je získanie konštrukčnej praxe v zobrazovaní útvarov v posunutí danom orientovanou úsečkou a zároveň objavovanie vlastností posunutia a formulovanie parciálnych záverov.

## 3.3 Riešenie konštrukčných úloh pomocou posunutia

Pre rozsiahlosť témy základné konštrukčné úlohy zamerané na aplikácie a precvičovanie posunutia bodu, priamky, kružnice vynechávame. Uvádzame skôr menej tradičné úlohy, pri riešení ktorých je potrebné zvládnuť základný vedomostný aparát o posunutí v rovine a jeho vlastností. Zároveň je potrebné v riešení uvedených úloh uplatniť istú dávku objaviteľstva, experimentu, logického spájania vopred známych poznatkov, prípadne akceptovať prostredia dynamických geometrií.

### 3.3.1 Konštrukcia trojuholníka využitím metódy posunutia

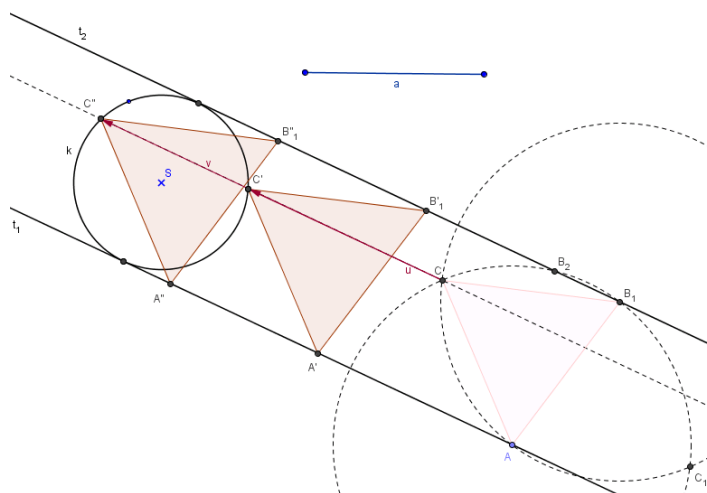
**Úloha** (súbor [posunutie\\_trojuholnik.html](#))

*Daná je kružnica  $k(S, r)$  a dve jej ľubovoľné dotyčnice  $t_1$  a  $t_2$ , pričom  $t_1 \parallel t_2$ . Zostrojte rovnostranný trojuholník  $ABC$  so stranou  $a$  tak, aby vrchol  $A$  ležal na priamke  $t_1$ , vrchol  $B$  na priamke  $t_2$  a vrchol  $C$  na kružnici  $k$ .*

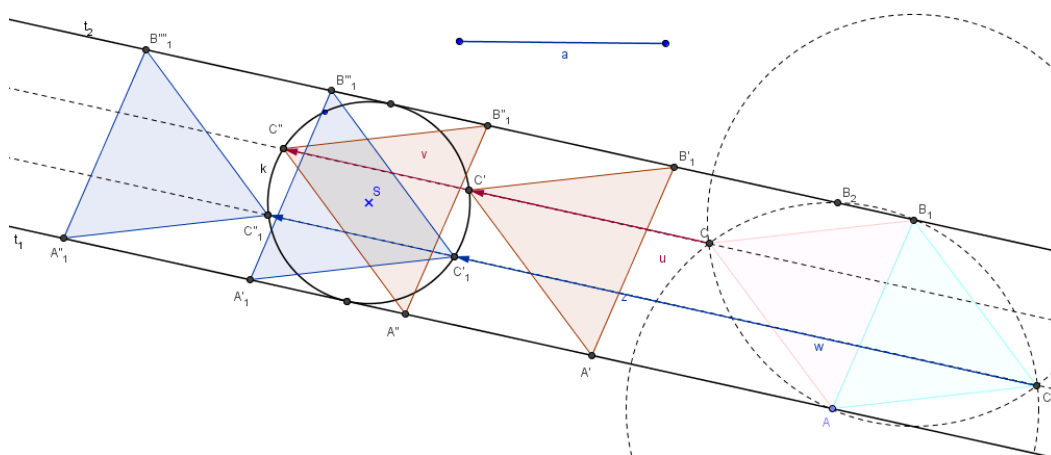


### Matematická podstata

Po zostrojení ľubovoľného rovnostranného trojuholníka ABC, ktorého vrchol A leží na priamke  $t_1$  a vrchol B na priamke  $t_2$  stačí realizovať posunutie do takej polohy, aby bod C ležal na danej kružnici  $k$ . Posunutie je dané orientovanou úsečkou rovnobežnou s dotyčnicami  $t_1$  a  $t_2$ .



Obr. 5



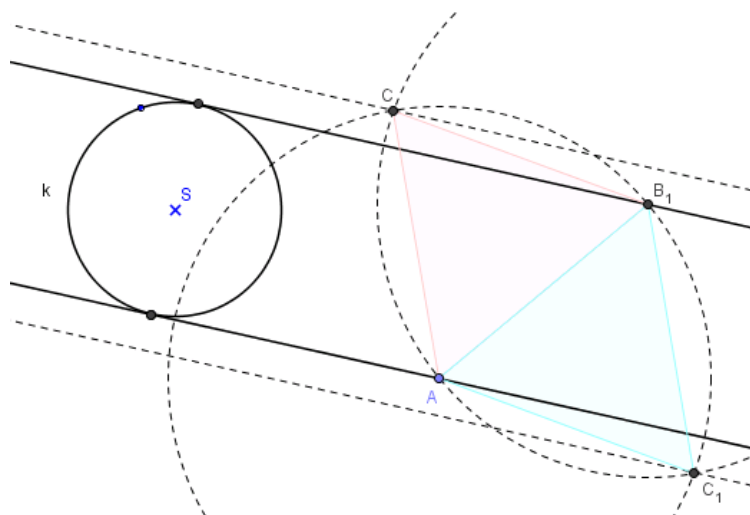
Obr. 6 Situácia, v ktorej počet riešení úlohy je 4

**Diskusia:** Úloha nemá riešenie v prípadoch:

- ak sa nedá zostrojiť pomocný trojuholník ABC, t. j. ak je dĺžka strany  $a$  je menšia ako dvojnásobný polomer ( $a < 2r$ );
- ak platí  $\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (2r)^2 < a^2$  t. j. dĺžka strany  $a > \frac{4}{3}r\sqrt{3}$  (obr. 7). Situáciu, v ktorej úloha nemá riešenie možno objaviť aj na základe experimentovania s konštrukciou, avšak objav uvedenej nerovnosti si vyžaduje hlbší pohľad. Stačí si predstaviť situáciu, že body B a C

ležia na dotyčnici, využiť Pytagorovu vetu a uvedomiť si, že ak sa bude dĺžka úsečky a zväčšovať, tak body typu C budú ležať mimo pásu ohraničeného dotyčnicami.

Úloha môže mať najviac 8 riešení. (Na obr. 6 sú znázornené 4 riešenia, ďalšie 4 sa získajú, ak sa pri konštrukcii pomocného trojuholníka využije bod  $B_2$ . Z dôvodu prehľadnosti konštrukcie obrázkov s týmto počtom riešení neuvádzame, ale v zdroji je uvedená implementovaná konštrukcia a situácia sa dá jednoducho nasimulovať.)



Obr. 7 Situácia opísaná v diskusii v bode 2

### Metodické poznámky

Využitie dynamickej geometrie v riešení uvedenej úlohy je opodstatnené najmä z hľadiska diskusie o počte riešení úlohy. Taktiež možno simulovať na virtuálnom výkrese množstvo situácií, ktoré sa vyskytnú v žiackych prácach, pretože každý z nich môže voliť polohu určujúcich prvkov úlohy rôzne. Predstava o všetkých možnostiach, ktoré môžu vzniknúť, je náročná. Interaktívna konštrukcia pomáha (nielen) žiakom rozvíjať hypotézy o podmienkach riešiteľnosti a overovať ich. Stupeň náročnosti úlohy možno modifikovať podľa úrovne žiakov napr. zadaním pevných hodnôt vstupných údajov (polomer kružnice, dĺžka strany trojuholníka), v čom môže byť dynamická geometria užitočná najmä pre učiteľa v prípravnej etape hodiny.

### 3.3.2 Obsah rovnobežníka netradične

**Úloha** (súbor [obsah\\_rovnobežníka.html](#))

Pomocou dynamickej geometrie ukážte, že obsah rovnobežníka ABCD sa rovná súčinu dĺžky strany rovnobežníka a prislúchajúcej výšky, t. j.  $S = a \cdot v_a$ .

### Metodické poznámky

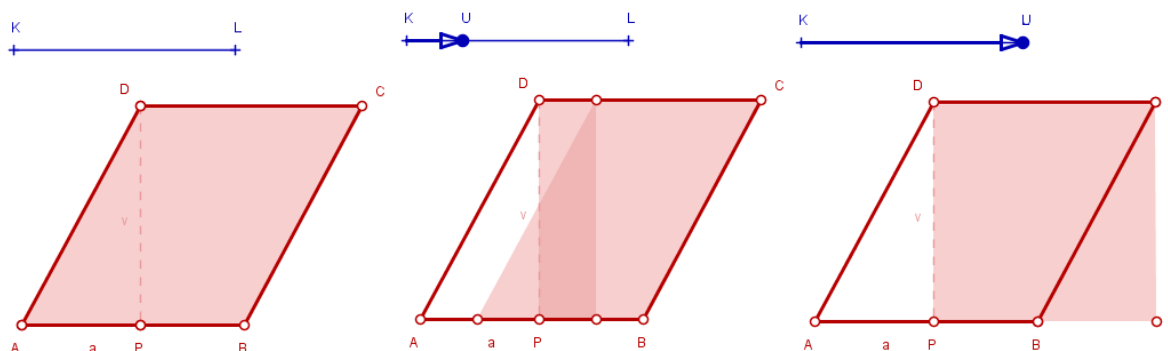
O platnosti vzťahu pre výpočet obsahu rovnobežníka sa žiaci dozvedajú už na ZŠ. Existuje viacero techník na jeho odvedenie. K najjednoduchším patrí využitie štvorcovej siete, alebo strihanie a premiestnenie vhodných častí rovnobežníka do tvaru obdĺžnika. Žiaci na strednej škole sa môžu

pokúsiť vytvoriť dynamickú animovanú konštrukciu v niektorom z dostupných geometrických programov. Úspešná realizácia takejto konštrukcie si vyžaduje pochopenie vlastností posunutia ako zhodného zobrazenia v rovine. Učiteľ môže využiť vopred pripravenú ukážku, pomocou ktorej so žiakmi objavujú matematickú podstatu úlohy (obr. 8a, 8b, 8c), identifikujú posunutie s jeho určujúcimi prvkami (smer posunutia bude fixný a dĺžka posunutia sa bude dynamicky meniť) a navrhujú spôsob dynamickej konštrukcie. Organizačná forma pri riešení úlohy bude závislá od technických podmienok a vybavenia učebne. Minimalistický spôsob je, že konštrukcia sa postupne vykonáva na interaktívnej tabuli prostredníctvom jedného počítača, zrejme s pomerne veľkou pomocou učiteľa matematiky. S výhodou sa dá využiť práca v skupinách, pričom každá skupina má k dispozícii pracovnú stanicu a učiteľ plní funkciu konzultanta.

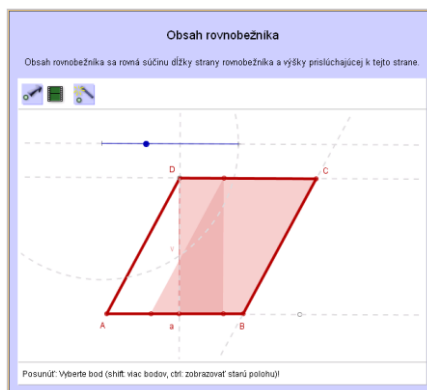
**Návod na zostrojenie animovanej interaktívnej konštrukcie** (odporúčaný softvér C.a.R, resp. Geogebra)

Konštrukčný postup je vhodné rozložiť na elementárne kroky:

- Zostrojenie ľubovoľného rovnobežníka ABCD a jeho výšky  $v_a$  na stranu AB. Označme pätu výšky P. (Z dôvodu všeobecnosti riešenia je vhodné „polohovať“ body A, B, D tak, aby boli voľné, čím sa zabezpečí možnosť zmeny tvaru rovnobežníka.)
- Konštrukcia úsečky KL, ktorá bude reprezentantom orientovanej úseky určujúcej posunutie a bude plniť funkciu „posuvníka“. Z vlastností posunutia vyplývajú podmienky pre konštrukciu úsečky KL:
  - úsečka KL má byť rovnobežná s AB a
  - jej dĺžka  $|KL| = |AB|$  (obr. 8a).
- Určenie počiatočnej polohy bodu U na úsečke KL. Bodom U bude možné pohybovať len po úsečke KL. (obr. 8b)
- Zostrojenie obrazu trojuholníka APD v posunutí danom orientovanou úsečkou KU.
- Trojuholníky APD a jeho obraz sú zhodné (vyplýva z vlastností posunutia ako zhodnej geometrickej transformácie). Preto po premiestnení trojuholníka APD sa obsah útvaru nemení (obr. 8c).



Obr. 8 a) b) c) Postup tvorby interaktívnej dynamickej pomôcky



Obr. 9 Ukážka zhotovenej pomôcky na vizualizáciu platnosti vzťahu na výpočet obsahu rovnobežníka

Po úspešnom zostrojení určujúcich a hľadaných prvkov úlohy je vhodné aplikovať aj nadštandardné konštrukčné nástroje, ktoré prostredia dynamickej geometrie ponúkajú. Všetky dostupné geometrické systémy obsahujú v základnej ponuke nástrojov animovanie bodu. Rozdiel je len v používateľskom rozhraní. Ak sa pre bod U definuje animovanie po úsečke KL, tak výsledok bude mimoriadne efektný (obr. 9).

### 3.3.3 Skladanie a rozkladanie posunutia pomocou osových súmerností

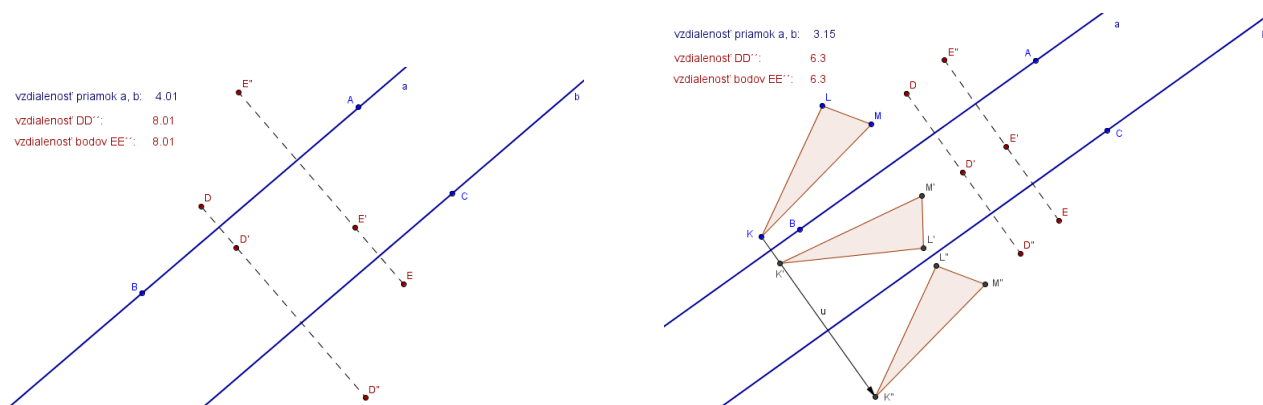
**Úloha** (súbor [skladanie.html](#))

Dané sú dve rovnobežné priamky  $a$ ,  $b$ , ktorých vzdialenosť je  $d$ . Zostrojte bod  $D'$ , ktorý je obrazom daného bodu  $D$  v osovej súmernosti podľa priamky  $a$  a bod  $D''$ , ktorý je obrazom bodu  $D'$  v osovej súmernosti podľa priamky  $b$ . Zistíte, čo platí pre vzdialenosť bodov  $DD''$ .

#### Metodické poznámky

Úlohu je vhodné riešiť najskôr s konkrétnymi číselnými hodnotami. Napr.: Priamky  $a$ ,  $b$  sú od seba vzdialené 13 cm, bod  $D$  je od priamky  $a$  vzdialený 4 cm a jeho vzdialenosť od priamky  $b$  je 17 cm. Po zistení vzdialenosti 26 cm, vyskúšajte iné hodnoty. Využite všeobecný výkres vytvorený v dynamickej geometrii, v ktorom je možné interaktívne meniť vzdialenosť daných priamok a tiež meniť polohu daného bodu  $D$  (obr. 10a). Vykonajte ďalšie aktivity:

- Zvoľte ďalší bod  $E$  a zostrojte jeho obrazy  $E'$ ,  $E''$  postupne najskôr v osovej súmernosti podľa priamky  $b$  a potom podľa priamky  $a$ . Aká je ich vzdialenosť?
- Zmeňte polohu bodov  $D$ ,  $E$  a sledujte uvedené vzdialenosti. (Vzdialenosť zostáva konštantná.)
- Zostrojte trojuholník  $KLM$  a nájdite postupne jeho obrazy v osových súmernostiach podľa priamky  $a$  a  $b$  (obr. 10b). Všimajte si pôvodný vzor – trojuholník  $KLM$  a jeho výsledný obraz  $K''L''M''$ . V ktorom zhodnom zobrazení možno považovať trojuholník  $KLM$  za vzor a  $K''L''M''$  za jeho obraz? (Posunutie.)
- Zostrojte orientovanú úsečku, ktorou je (v predchádzajúcom kroku identifikované) posunutie určené. Určte jej orientáciu a dĺžku.



Obr. 10 a) b) Interaktívna pomôcka na skladanie dvoch osových súmerností s rovnobežnými osami súmernosti

## Zhrnutie

Zloženie dvoch osových súmerností s navzájom rovnobežnými osami súmernosti je ekvivalentné s jednoduchým posunutím. Dĺžka orientovanej úsečky, ktorou je posunutie určené, je rovná dvojnásobku vzdialenosti osí súmernosti a je kolmá na osi súmernosti.

## Úloha (C.a.R. zadanie [rozklad\\_posunutia.html](#))

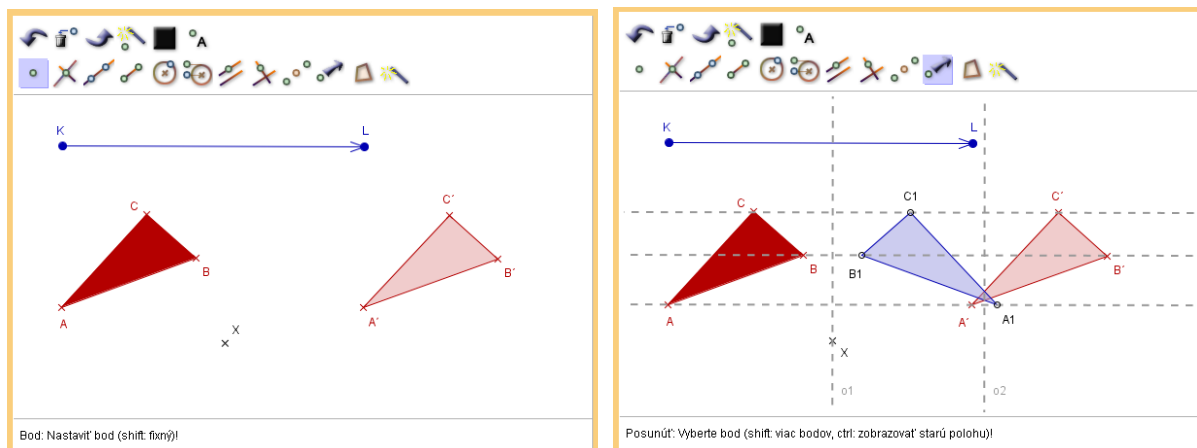
Daný je trojuholník ABC a jeho obraz  $A'B'C'$  v posunutí určenom orientovanou úsečkou  $\overline{KL}$ . Ďalej je daný ľubovoľný bod X. Zostrojte priamky  $o_1$  ( $X \in o_1$ ) a  $o_2$  tak, aby po aplikovaní osových súmerností podľa osí  $o_1$  a  $o_2$  bol obrazom trojuholníka ABC trojuholník  $A'B'C'$ .

## Matematická podstata

Úloha je zameraná na rozklad posunutia na dve osové súmernosti s osami  $o_1$  a  $o_2$  v špeciálnych polohách. Os  $o_1$  volíme kolmo na orientovanú úsečku  $\overline{KL}$  tak, aby prechádzala bodom X. Druhá os  $o_2$  je už určená jednoznačne.

## Metodické poznámky

Interaktívne prostredie na riešenie úlohy môže pripraviť učiteľ v ľubovoľnom dynamickom geometrickom systéme. Stačí zostrojiť vzorový trojuholník ABC, jeho obraz  $A'B'C'$  v posunutí danom orientovanou úsečkou  $\overline{KL}$  a bod X. Pri realizácii možno v celej šírke využiť všetky geometrické nástroje, ktoré daný softvér ponúka. Voľné útvary, t. j. útvary, ktorých polohu a veľkosť bude možné meniť sú body A, B, C, K, L, X, trojuholník ABC, úsečka KL. Ak sa v takto vytvorenom zadaní navyše „skryje“ úsečka  $\overline{KL}$ , bude to znamenať mierne zvýšenie náročnosti úlohy.



Obr. 11 Zadanie, po vyriešení ktorého sa zobrazí oznam o úspešnosti riešenia

Keďže uvedená úloha je inverznou k predchádzajúcej úlohe o skladaní, možno predpokladať pri jej riešení využitie vyššie spomínaných záverov. Výsledkom experimentátorských a bádateľských aktivít v súčinnosti so znalosťami o posunutí a osovej súmernosti by mala byť znalosť odpovedí na nasledujúce otázky:

- Aká podmienka musí byť splnená pre os  $o_1$  vo vzťahu k orientovanej úsečke určujúcej posunutie? (Kolmosť - os  $o_1$  je kolmá na  $\overline{KL}$ .)
- Aký vplyv na riešenie úlohy má poloha bodu X? (Žiadny, poloha prvej osi rozkladu je ľubovoľná, až na podmienku kolmosti na  $\overline{KL}$ .)
- Akým spôsobom je následne určená poloha osi  $o_2$ ? (Jednoznačnosť – obraz  $A_1B_1C_1$  trojuholníka ABC v osovej súmernosti podľa  $o_1$  sa stáva vzorom pre obraz  $A'B'C'$  v osovej súmernosti podľa  $o_2$ . Druhá osová súmernosť je teda určená dvojicou navzájom odpovedajúcich si bodov, napr.  $A_1$  a  $A'$ .)
- Aká je vzdialenosť osí súmernosti rozkladu posunutia vo vzťahu k dĺžke orientovanej úsečky  $\overline{KL}$  určujúcej posunutie? (Vzdialenosť osí rozkladu posunutia je polovica dĺžky orientovanej úsečky určujúcej posunutie.)

Konstrukčné riešenie si možno overiť aj vyriešením zadania uvedeného v záhlaví úlohy.

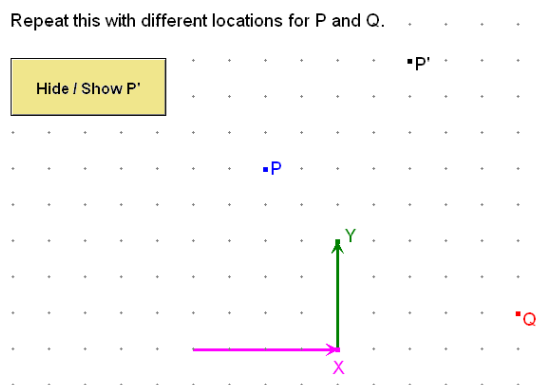
### 3.4 Odkazy na učebné materiály a informačné zdroje

V súvislosti s tvorbou učebných a metodických materiálov je potrebné uviesť, že je nutné mať dostatočný prehľad o už existujúcich elektronických pomôckach voľne dostupných na Internete. Niekedy sa dajú nájsť dostatočne kvalitné materiály, ktoré sú pripravené na okamžité použitie a nemá zmysel vytvárať nové, vlastné produkty. Zároveň je tiež pravda, že aj vyhľadávanie a zhodnotenie kvality materiálov je veľmi časovo náročné. Preto je dôležité, aby sa do pripravovaných metodík zaraďovali aj odkazy na overené a spoľahlivé zdroje s matematickým obsahom k danej téme. Spoľahlivosť spočíva nielen v korektnej didaktickej transpozícii odborného materiálu, ale aj vo využívaní dlhodobu (rokmi) udržiavaných webových stránok (najlepšie tých,



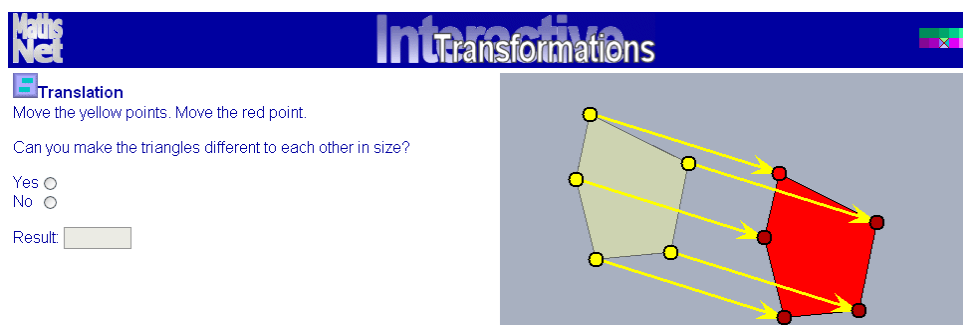
ktoré vznikli na univerzitných, resp. oficiálnych fórach). V ďalšej časti ponúkame niektoré ľahko dostupné a overené odkazy s ich krátkou charakteristikou z oblasti posunutia v rovine.

- Cabri geometria II Plus obsahuje vo svojej knižnici súbor [6-translation\\_horvertdisp.fig](#) vhodný na úvodné experimentovanie s posunutím. Podstata spočíva v hľadaní obrazu daného bodu P v určenom posunutí (obr. 12).



Obr. 12 Cabri IIPlus a jej pomôcka na experimentovanie s posunutím

- Interaktívne pomôcky spolu s poznámkami pre učiteľov, rodičov, námetmi na aktivity a postupnými inštrukciami, ktorých využitie je opísané v aktivite č. 1:
  - [http://nlvm.usu.edu/en/NAV/frames\\_asid\\_167\\_g\\_1\\_t\\_3.html?open=activities&from=topic\\_t\\_3.html](http://nlvm.usu.edu/en/NAV/frames_asid_167_g_1_t_3.html?open=activities&from=topic_t_3.html)
  - [http://nlvm.usu.edu/en/NAV/frames\\_asid\\_301\\_g\\_2\\_t\\_3.html?open=activities&from=topic\\_t\\_3.html](http://nlvm.usu.edu/en/NAV/frames_asid_301_g_2_t_3.html?open=activities&from=topic_t_3.html)
- Interaktívna animovaná pomôcka, ktorej využitie je opísané v aktivite č. 2:
  - <http://www.mathsisfun.com/geometry/translation.html>
- animované a interaktívne ukážky základných vlastností a princípov posunutia umožňujúce pozorovanie, porozumenie, skúmanie a tiež konštruovanie, pričom jednotlivé aktivity sú spojené s jednoduchým testovaním vo forme výberu odpovede (obr. 13).
  - <http://www.mathsnet.net/transform/traindex.html>



Obr. 13 <http://www.mathsnet.net/transform/traindex.html>

## 4 Záver

Z predchádzajúceho textu a ukážok je zrejmé, že podobne navrhnuté didaktické materiály je lepšie zverejňovať v elektronickej podobe. Neznamená to však, že vyučovanie má prebiehať čisto elektronicou formou. Naopak, snahou pri tvorbe návrhu bolo ukázať, že prítomnosť, inštrukcie a návody učiteľa sú pri štúdiu na základnej a strednej škole u nás nezastupiteľné. V súvislosti s vyučovaním matematiky v prostredí IKT možno hovoriť o viacerých typoch vyučovania:

- priame vyučovanie (face to face) - učiteľ aj žiaci majú k dispozícii a zároveň aktívne využívajú prostriedky IKT,
- e-learningové – učenie sa a vyučovanie len elektronicou formou,
- blended learning – kombinácia kontaktného vyučovania s integrovaním prostriedkov IKT a aktívnym využívaním e-learningu.

Vo vyučovaní školskej matematiky u nás je a zrejme ešte aj dlho zostane preferovaná forma priameho vyučovania. Ak sa kontaktné vyučovanie aplikuje v spojení s využívaním prostriedkov informačných a komunikačných technológií, môže byť vytvorené prostredie podnetné a motivujúce.

**Príspevok bol spracovaný ako súčasť grantového projektu s názvom “Školská matematika v prostredí IKT” (MŠ SR KEGA 3/6021/08).**

## Literatúra

- [1] Fulier, J. [ed.]: *IKT vo vyučovaní matematiky*. Nitra: FPV Univerzita Konštatína Filozofa, 2005, 212 s. ISBN 80-8050-925-5
- [2] Fulier, J. [ed.]: *IKT vo vyučovaní matematiky 2*. Nitra: FPV Univerzita Konštatína Filozofa, 2005, 212 s. ISBN 80-8094-057-6
- [3] Hanzel, P.: Dynamické prvky vo vyučovaní geometrie. In: *Matematika 3*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2008. s. 101-108. ISBN 978-80-244-1963-3
- [4] Hecht, T. – Černek, P.: *Matematika pre 2. Ročník gymnázií a SOŠ*. Bratislava: OrbisPictusstropolitana, 1997. 64 s. ISBN 80-7158-084-1
- [5] Híc, P. – Pokorný, M.: *Grafové algoritmy v školskej praxi*. On-line kurz, 2004, Trnava. Dostupné na <http://pdfweb.truni.sk/pokorny/kurzy/gasp.zip> ISBN 80-8082-023-6
- [6] Híc, P. – Pokorný, M.: *Opisná štatistika*. On-line kurz, 2008, Trnava. ISBN 978-80-8082-201-9
- [7] Koreňová, L. a kol.: *EMATIK: Innovation trends in education of future teachers and in further education of mathematics teachers*. 10th International Scientific Conference : Proceedings (CD ROM). - Bratislava : Slovenská e-akadémia, 2009. - ISBN 978-80-89316-11-3
- [8] Lukáč, S. a kol.: *Využitie informačných a komunikačných technológií v predmete Matematika pre stredné školy*. Košice: Elfa s. r. o. (pre UIPŠ). 2010. ISBN 978-80-8086-149-0
- [9] Medek, V. a kol.: *Matematická terminológia*. Bratislava: SPN, 1975. 144 s. 67-158-75

- [10] Partová, E.[ed.]: Matematika V: elektronické médiá vo vyučovaní matematiky. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 2007, 115 s. ISBN 978-80-223-2367-3
- [11] Petáková, J.: *Matematika*. Praha: Prometheus, 303 s., 1998. ISBN 80-7196-099-3
- [12] Rumanová, L. – Vallo, D.: *Geometria – vybrané kapitoly*. Nitra: FPV UKF, 2009. 108 s. ISBN 978-80-8094-567-1
- [13] Semanišinová, I.: *Využitie informačných a komunikačných technológií v predmete Matematika pre základné školy*. Košice: Elfa s. r. o. (pre UIPŠ). 2010. ISBN 978-80-8086-158-2
- [14] Smida, J. a kol.: *Matematika pre 1. ročník gymnázia*. Bratislava: SPN, 1984. 320 s. 67-180-84
- [15] Šedivý, O.: *Vybrané kapitoly z didaktiky matematiky*. (Konštrukčné úlohy a metódy ich riešenia.) Nitra: FPV UKF, 2001. 123 s. ISBN 80-8050-417-2
- [16] Sklenáriková, Z. – Čižmár, J.: *Elementárna geometria euklidovskej roviny*. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 2002. 220 s. ISBN 80-223-1585-0
- [17] Vallo, D.: Niektoré možnosti využitia Cabri 3D vo vyučovaní stereometrie. In: *41. konferencia slovenských matematikov, Zborník abstraktov zo 41. konferencie slovenských matematikov konanej v dňoch 26. - 29. 11. 2009 v Jasnej pod Chopkom*. Žilina : EDIS, 2009., s. 43-44. ISBN 978-80-554-0133-1
- [18] Vidermanová, Kitti - Melušová, Janka : IKT vo vyučovaní matematiky na základných a stredných školách. In: *Sborník 4. konference Užití počítačů ve výuce matematiky*. České Budějovice : Jihočeská univerzita, 2009, S. 134-158. ISBN 978-80-7394-186-4
- [19] Židek, O.: Modernizácia vyučovania matematiky a jej odraz v tvorbe didaktických materiálov. In: *Inovácia v matematickej príprave žiakov na 1. stupni ZŠ*. Trnava: Katedra matematiky a informatiky, Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity v Trnave, s. 116-121, 2007. ISBN 978-80-8082-158-6
- [20] Žilková, K. *Školská matematika v prostredí IKT*. Bratislava: Univerzita Komenského v Bratislave, 138 s. 2009. ISBN 978-80-223-2555-4

### Kontaktná adresa

PaedDr. Katarína Žilková, PhD.  
Katedra predškolskej a elementárnej pedagogiky  
Pedagogická fakulta Univerzity Komenského v Bratislave  
Račianska 59, 813 34 Bratislava  
katarina@zilka.sk